POLITECHNIKA WARSZAWSKA

DYSCYPLINA NAUKOWA MATEMATYKA
DZIEDZINA NAUK ŚCISŁYCH I PRZYRODNICZYCH

Rozprawa doktorska

mgr Grzegorz Bajor

Konstrukcje pierścieni posiadających wybrane własności algebraiczne

Promotor
dr hab. Michał Ziembowski, prof. uczelni

WARSZAWA 2024

Streszczenie

Praca dotyczy konstrukcji pierścieni spełniających zadane własności algebraiczne. Głównym obiektem badań są algebra ścieżek Leavitta oraz własności anihilatorów pierścieni. Dla algebry ścieżek Leavitta $L_K(E)$ przedstawiamy warunki konieczne i wystarczające, aby spełniała ona Własność (A). W przypadku pierwszych algebr ścieżek Leavitta $L_K(E)$ konstruujemy klasę maksymalnych przemiennych podalgebr. Przedstawiamy również konstrukcję pierścienia A spełniającego warunek anihilatorowy (a.c.), dla którego ani pierścień wielomianów $A[x]$, ani pierścień szeregów potęgowych $A[[x]]$ nie spełnia tego warunku.

Słowa kluczowe: algebry ścieżek Leavitta, anihilatory, pierścienie z Własnością (A), maksymalne przemienne podalgebry, warunek anihilatorowy.

Abstract

The thesis focuses on constructions of rings satisfying specified algebraic properties. The main object of research are Leavitt path algebra and the properties of ring annihilators. For Leavitt path algebras, denoted by $L_K(E)$, we present necessary and sufficient conditions for it to satisfy Property (A). In case of prime Leavitt path algebras, we construct a class of maximal commutative subalgebras. We also introduce a construction of a ring A satisfying the annihilator condition (a.c.), where neither the polynomial ring $A[x]$ nor the power series ring $A[[x]]$ satisfies this condition.

Keywords: Leavitt path algebras, annihilators, rings with Property (A), maximal commutative subalgebras, annihilator condition.

Spis treści

Rozdział 1

Wstępne informacje i ustalenie notacji

Przedmiotem pracy jest opis pewnych konstrukcji łącznych pierścieni nieprzemiennych. Zaznaczamy, że nie wymagamy przemienności mnożenia i nie zakładamy, że pierścienie są z jedynką. Jeśli rozważamy pierścienie przemienne lub posiadające jedynkę, to wyraźnie to podkreślimy.

Algebrą nad ciałem K nazywamy pierścień R, który jest jednocześnie przestrzenią wektorową nad K oraz dla dowolnych elementów $x, y \in R$ i $a, b \in K$ zachodzi $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$.

Klasycznym przykładem pierścienia (a jednocześnie algebry nad K) jest pierścień $\mathbb{M}_n(K)$ macierzy $n \times n$ nad ciałem K. Innym znanym przykładem pierścienia nieprzemiennego który jest algebrą nad $\mathbb{R}$, są kwaterniony Hamiltona zdefiniowane w zbiorze $\mathbb{H} = \{ae + bi + cj + dk : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, gdzie e, i, j, k są pewnymi elementami bazowymi przestrzeni czterowymiarowej nad $\mathbb{R}$ spełniającymi równości $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e$, $ei = ie = i$, $ej = je = j$, $ek = ke = k$. Algebra kwaternionów Hamiltona jest ważna, ponieważ zgodnie z twierdzeniem Frobeniusa jest jedną z trzech skończenie wymiarowych algebr nad $\mathbb{R}$, w której wszystkie niezerowe elementy są odwracalne.

Istotne jest znajdywanie przykładów pierścieni posiadających zadane własności. Wtedy wprowadzone abstrakcyjnie pojęcia mają realizację. Konstrukcje pierścieni czy algebr spełniających określone warunki pozwalają lepiej zrozumieć wprowadzaną własność.

Jednym z takich zagadnień jest badanie maksymalnych podobiektów algebry. Problemy dotyczące znajdowania maksymalnych ze względu na relację zawierania podalgebr (niekoniecznie łącznych) algebr, w szczególności maksymalnych przemiennych podalgebr, były rozważane między innymi w pracach [24], [25], [46] oraz [47]. Znany wynik Schura (zob. [48]) mówi, że dla dowolnego ciała algebraicznie domkniętego K charakterystyki 0 wymiar nad K dowolnej przemiennej podalgebry algebry macierzy $n \times n$ nad K wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$, gdzie $\lfloor \ \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby. Rezultat ten rozszerzył Jacobson w pracy [32] na przemienne podalgebry algebry $\mathbb{M}_n(K)$ dla dowolnego ciała K. Co więcej, znany jest przykład przemiennej podalgebry $\mathbb{M}_n(K)$, której wymiar wynosi dokładnie $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$.

Dużo informacji o strukturze i własnościach pierścieni dostarczają anihilatory ich podobiektów. Anihilator elementu w pierścieniu jest zbiorem wszystkich elementów pierścienia, które po pomnożeniu z lewej lub prawej strony dają zero.

W rozprawie będziemy badać wybrane własności anihilatorowe. Ważną własnością przemiennych pierścieni noetherowskich jest to, że anihilator dowolnego ideału V składającego się z dzielników zera jest niezerowy. Wynik ten nie jest prawdziwy dla wielu innych pierścieni, nawet w przypadku, gdy ideał V jest skończenie generowany. W pracy [31] wskazana własność nazywana jest Własnością (A). Własność (A) jest ściśle związana z innym warunkiem anihilatorowym. Lucas w pracy [36] wprowadził następujące pojęcie: pierścień przemienny R ma warunek anihilatorowy (w skrócie (a.c.)), jeśli dla każdego skończenie generowanego ideału V pierścienia R istnieje element $b \in R$, którego anihilator jest równy anihilatorowi V. Zagadnienia dotyczące analizy anihilatorów i ich własności poruszane są między innymi w pracach [27], [28], [31], [52].

W drugim rozdziale wprowadzamy konstrukcję algebry ścieżek Leavitta nad ciałem K grafu E, które oznaczać będziemy przez $L_K(E)$. Przedstawiona zostanie krótka historia związana z wprowadzeniem wspomnianej konstrukcji. Następnie podamy przykłady algebr, które można reprezentować jako algebrę ścieżek Leavitta pewnego grafu, w tym algebrę macierzy $n \times n$ nad ciałem K. Istotną rolę w algebrach ścieżek Leavitta pełnią zamknięte ścieżki, dlatego przedstawimy ich podstawowe własności. Interesującym jest znalezienie warunków koniecznych i wystarczających, jakie powinien spełniać graf, aby algebra ścieżek Leavitta posiadała zadane własności. Odpowiedź na tego typu pytanie będzie głównym motywem dużej części wyników przedstawionych w tej dysertacji.

Trzeci rozdział jest poświęcony własnościom anihilatorowym w algebrze ścieżek Leavitta. Przedstawione zostaną warunki konieczne i wystarczające, aby algebra była prosta

(Lemat 3.1.5) oraz pierwsza (Twierdzenie 3.1.6). Wyniki te są znane w literaturze, ale przytaczamy je dla kompletności rozważań. W dalszej części odpowiadamy na pytanie o warunki konieczne i wystarczające, jakie powinien posiadać graf, aby algebra ścieżek Leavitta spełniała Własność (A) (w przypadku gdy liczba wierzchołków jest skończona zob. Twierdzenie 3.1.8, w przypadku nieskończonym zob. Twierdzenie 3.1.9). W tym celu podajemy pewną konstrukcję (Definicja 3.1.1) prowadzącą do podziału grafu E na właściwe podgrafy $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, takie że $L_K(E) \cong L_K(\mathcal{E}_1) \times L_K(\mathcal{E}_2)$ (Stwierdzenie 3.1.3).

W kolejnym rozdziale przedstawiamy nową konstrukcję przemiennych podalgebr pierwszych algebr ścieżek Leavitta (Twierdzenie 4.2.1). Dowodzimy, że konstrukcja ta prowadzi do maksymalnych przemiennych podalgebr $L_K(E)$, opierając się na odpowiednim rozbiciu zbioru wierzchołków grafu. W omawianym rozdziale rozszerzamy wynik Schura dla algebry macierzy $\mathbb{M}_n(K)$ na pierwsze algebry ścieżek Leavitta $L_K(E)$ (Stwierdzenie 4.2.17) oraz podajemy niezależny, alternatywny dowód znanego faktu mówiącego, że tak zwane jądro przemienne (wprowadzone w [18]) algebry $L_K(E)$ jest jej maksymalną przemienną podalgebrą.

W ostatnim rozdziale konstruujemy algebrę A, spełniającą prawostronny warunek anihilatorowy (a.c.), której ani pierścień wielomianów $A[x]$, ani pierścień szeregów potęgowych $A[[x]]$ nie spełnia tego warunku (Stwierdzenia 5.2.2 i 5.2.3). Przedstawiamy również konstrukcję algebry, która nie spełnia prawostronnego warunku anihilatorowego (a.c.), natomiast w pierścieniu $A[x]$ własność ta jest spełniona (Stwierdzenia 5.3.1 i 5.3.7).

Definicja 1.1.1. Ideałem pierścienia R nazywamy każdy podzbiór T zbioru R o następujących własnościach:

1. T jest podgrupą addytywnej grupy R,
2. dla każdego $\gamma \in R$ i $\alpha \in T$ zachodzi $\gamma\alpha \in T$,
3. dla każdego $\gamma \in R$ i $\alpha \in T$ zachodzi $\alpha\gamma \in T$.

Z uwagi na to, że na ogół nie zakładamy przemienności rozważanych pierścieni, wyróżniać będziemy jednostronne podstruktury. Zatem ideał jest *ideałem lewostronnym (prawostronnym)*, jeśli zachodzą warunki 1 i 2 (odpowiednio 1 i 3).

Definicja 1.1.2. Ideał T nazywamy ideałem głównym, jeśli T generowany jest przez jednoelementowy podzbiór pierścienia R. Odpowiednio definiujemy prawostronne i lewostronne ideały główne.

Jeśli w pierścieniu każdy skończenie generowany ideał (ideał prawostronny) jest ideałem głównym, to mówimy, że pierścień ten jest pierścieniem *Bézout* (*prawostronnie Bézout*). Wspomniane klasy pierścieni są dobrze opisana w literaturze.

Definicja 1.1.3. Powiemy, że R posiada *lokalne jedności*, jeżeli dla każdego skończonego podzbioru R istnieje element neutralny ze względu na mnożenie.

Definicja 1.1.4. Pierścień R nazywamy *pierwszym*, jeżeli dla dowolnych dwóch elementów $a, b \in R$, $aRb = 0$ implikuje $a = 0$ lub $b = 0$.

Do weryfikacji pierwszości pierścienia czasami wygodnie jest skorzystać z jednego z równoważnych warunków odnoszących się do jego ideałów.

Twierdzenie 1.1.1. *Niech R będzie pierścieniem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *Dla dowolnych dwóch ideałów T, Q pierścienia R, jeśli $TQ = \{0\}$, to $T = \{0\}$ lub $Q = \{0\}$.*

2. *Dla dowolnych dwóch prawostronnych ideałów T, Q pierścienia R, jeśli $TQ = \{0\}$, to $T = \{0\}$ lub $Q = \{0\}$.*

3. *Dla dowolnych dwóch lewostronnych ideałów T, Q pierścienia R, jeśli $TQ = \{0\}$, to $T = \{0\}$ lub $Q = \{0\}$.*

Niech I będzie niepustym zbiorem indeksów oraz $X = \{x_i : \ i \in I\}$. Słowem nazywamy dowolny skończony ciąg elementów x_i.

Definicja 1.1.5. *Wolnym monoidem* nad zbiorem X, oznaczanym przez $\langle X \rangle$, nazywamy zbiór wszystkich słów elementów ze zbioru X (wraz ze słowem pustym, oznaczanym przez 1) oraz mnożeniem określonym przez konkatenację słów.

Na przykład

$$x_1x_2x_1 \cdot x_1x_1x_3x_4x_2 = x_1x_2x_1x_1x_1x_3x_4x_2.$$

Oczywiście powyżej definiowane mnożenie jest łączne oraz 1 jest elementem neutralnym.

Długością słowa w jest liczba elementów w nim występujących. Przyjmujemy, że długość słowa pustego wynosi 0. Na przykład, długość $w = x_{i_1} \dots x_{i_t}$ jest równa $|w| = t$.

Uwaga 1.1.1. Funkcja długości jest homomorfizmem monoidów $\langle X\rangle \to (\mathbb{N}, +)$, ponieważ

$$|vw| = |v| + |w|, \quad \forall w, v \in \langle X\rangle.$$

Uwaga 1.1.2. Dla każdego monoidu M i dowolnego podzbioru $\{a_i : i \in I\}$ zbioru M rozważmy wolny monoid $\langle X\rangle$ nad zbiorem $X = \{x_i : i \in I\}$. Wówczas odwzorowanie $x_i \mapsto a_i$ rozszerza się jednoznacznie do homomorfizmu monoidów $\langle X\rangle \to M$ (zadanego przez $x_{i_1} \dots x_{i_t} \mapsto a_{i_1} \dots a_{i_t}$).

Definicja 1.1.6. Niech K będzie ciałem. *Wolną łączną K-algebrą* $K\langle X\rangle$ o zbiorze generatorów $X = \{x_i :\ i \in I\}$ nazywamy przestrzeń wektorową nad K o bazie $\langle X\rangle$. Mnożenie definiujemy w następujący sposób

$$\Big(\sum_{w\in\langle X\rangle} c_w w\Big)\Big(\sum_{v\in\langle X\rangle} c'_v v\Big) = \Big(\sum_{u\in\langle X\rangle} c''_u u\Big),$$

gdzie $c''_u = \sum_{wv=u} c_w c'_v$.

Elementy ze zbioru $K\langle X\rangle$ nazywamy nieprzemiennymi wielomianami (lub w skrócie wielomianami). Oczywiście, dla elementu $f \in K\langle X\rangle$ istnieje skończony zbiór indeksów $i_1, \dots, i_t \in I$, taki że jedynie $x_{i_1}, \dots, x_{i_t} \in X$ występują w f. Wówczas będziemy zapisywać $f = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_t})$.

Uwaga 1.1.3. Dla dowolnej K-algebry R i dowolnej funkcji $\psi : X \to R$ mamy jednoznacznie zdefiniowany homomorfizm $\phi : K\langle X\rangle \to R$, dla którego $\phi(x_i) = \psi(x_i)$, mianowicie, jeśli $r_i = \psi(x_i)$, najpierw definiujemy ϕ na słowach

$$\phi(x_{i_1} \dots x_{i_t}) = r_{i_1} \dots r_{i_t},$$

później rozszerzamy ϕ liniowo, to jest $\phi(\sum_w c_w) = \sum_w c_w \phi(w)$.

W szczególności, gdy $\{r_i : i \in I\}$ generuje R, to ϕ jest suriekcją, więc

$$R \cong K\langle X\rangle / \ker \phi.$$

Niech I, J będą zbiorami indeksów. Dla $X = \{x_i : i \in I\}$ i elementów $f_j \in K\langle X\rangle$ dla $j \in J$, powiemy, że rodzina T jest generowana przez relacje $f_j = 0$ dla $j \in J$, jeśli T jest generowany przez elementy f_j. Wówczas powiemy także, że algebra $R = K\langle X\rangle/T$ jest generowana przez relacje $f_j = 0$.

Chociaż poniższe dwie definicje nie wiążą się bezpośrednio z rozważanymi przez nas zagadnieniami, to postanowiliśmy je przypomnieć, ponieważ wykorzystuje się w nich pojęcia obecnie prezentowane oraz pojawią się one w części motywującej badania przedstawione w Rozdziale 4.

Definicja 1.1.7. Wielomian $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ nazywamy *tożsamością wielomianową* K-algebry R, jeśli dla każdych $r_1, \ldots r_n \in R$ zachodzi $f(r_1, \ldots, r_n) = 0$.

W takim przypadku mówimy również, że R *spełnia tożsamość*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Definicja 1.1.8. Jeśli niezerowy wielomian f jest tożsamością wielomianową algebry R, to R nazywamy *PI-algebrą* (ang. *polynomial identity*).

Definicja 1.1.9. Niech K będzie dowolnym ciałem i niech $\langle X\rangle$ będzie wolnym monoidem nad zbiorem X.

1. Niech $f = \sum c_w w$ będzie wielomianem należącego do $K\langle X\rangle$, gdzie $c_w \in K$, $w \in \langle X\rangle$. Wówczas każdy składnik $c_w w$ nazywamy *jednomianem* f.

   Stopniem jednomianu $c_w w$ nazywamy długość $|w|$, natomiast stopniem f nazywamy maksimum ze stopni wszystkich niezerowych jednomianów.

2. *Nośnikiem* wielomianu f nazywamy zbiór

$$\operatorname{supp}(f) = \{w \in \langle X\rangle : c_w \neq 0\}.$$

Wielomian f nazwiemy *jednorodnym*, jeśli dla każdego $w \in \operatorname{supp}(f)$, jednomian $c_w w$ ma ten sam stopień.

Ważnym narzędziem w badaniu i konstruowaniu pierścieni nieprzemiennych jest twierdzenie Bergmana znane powszechnie pod nazwą *Diamond Lemma*. Dostarcza ono warunki wystarczające na przeprowadzenie ciągu redukcji danego jednomianu i otrzymanie elementów w tak zwanej jednoznacznej normalnej postaci.

Niech K będzie ciałem i niech X będzie zbiorem. Niech $R = K\langle X\rangle$ będzie wolną algebrą łączną nad K o generatorach z X. Mówiąc o częściowym porządku $\leqslant$ w monoidzie $\langle X\rangle$, mamy na myśli, że dla dowolnych elementów $a, b, b', c \in \langle X\rangle$, jeśli $b \leqslant b'$, to $abc \leqslant ab'c$. Częściowy porządek spełnia warunek łańcucha zstępującego, jeśli każdy łańcuch zstępujący stabilizuje się. Przez system redukcji dla R rozumiemy zbiór par indeksowanych po pewnym zbiorze I, $S = \{(m_i, n_i), : \ i \in I\}$, gdzie $m_i \in \langle X\rangle$ jest jednomianem oraz $n_i \in R$ dla każdego $i \in I$. System redukcji wskazuje nam, że każde wystąpienie jednomianu m_i możemy zastąpić elementem n_i. Mówimy, że S jest kompatybilny z częściowym porządkiem, jeśli dla każdego $i \in I$ każdy jednomian m w nośniku n_i spełnia $m < m_i$.

Dla dwóch jednomianów $a, b \in \langle X \rangle$ i elementu $(m_i, n_i) \in S$ definiujemy odwzorowanie $r_{am_ib} : R \to R$, przekształcające am_ib na an_ib, a pozostałe elementy przekształca tożsamościowo. Odwzorowania r_{am_ib} nazywamy redukcjami. Mówimy, że element R jest zredukowany nad systemem redukcji S, jeśli jest stały ze względu na każdą z redukcji. Element $s \in R$ jest skończenie redukowalny, jeśli dla każdego ciągu redukcji $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ciąg $r_1(s), r_2(s), r_3(s), \ldots$ stabilizuje się.

Lemat 1.1.2 (Bergman's Diamond Lemma, [16, Theorem 1.2])**.** *Niech K będzie ciałem, X będzie zbiorem i niech $R = K\langle X \rangle$ będzie wolną algebrą łączną nad K. Niech $\leqslant$ będzie częściowym porządkiem na $\langle X \rangle$ spełniającym warunek łańcucha zstępującego. Niech $S = \{(m_i, n_i), : \ i \in I\}$ będzie systemem redukcji kompatybilnym z $\leqslant$. Rozważmy następujące dwa warunki:*

1. *(Rozwiązalność nakładań.) Jeśli $a, b, c \in \langle X \rangle$ i istnieją $i, j \in I$, dla których $ab = m_i$ i $bc = m_j$, to istnieje ciąg redukcji przekształcający n_ic i an_j na wspólny element.*

2. *(Rozwiązalność inkluzji.) Jeśli $a, b, c \in \langle X \rangle$ i istnieją $i, j \in I$, dla których $abc = m_i$ i $b = m_j$, to istnieje ciąg redukcji przekształcający n_i i an_jc na wspólny element.*

Jeśli zachodzą powyższe dwa warunki, to każdy element R jest skończenie redukowalny względem S. Dodatkowo, niech W będzie ideałem generowanym przez relacje $\{m_i = n_i\}_{i\in I}$. Każdy element R/W może zostać wówczas jednoznacznie przedstawiony w postaci $r + W$, gdzie r jest elementem warstwy $r + W$ i jest zredukowany nad systemem redukcji S.

Definicja 1.1.10. Centrum pierścienia R nazywamy zbiór $Z(R)$ wszystkich elementów przemiennych, ze względu na mnożenie, ze wszystkimi innymi elementami tego pierścienia.

$$Z(R) := \{r \in R \mid \text{dla dowolnego } b \in R,\ rb = br\}.$$

Definicja 1.1.11. Element r pierścienia R, dla którego istnieje element $b \neq 0$, taki że $rb = 0$ (odpowiednio $br = 0$) nazywamy *lewostronnym* (odpowiednio *prawostronnym*) *dzielnikiem zera.*

W pracy będziemy rozważać pewne własności związane z anihilatorami zbiorów. Definicję anihilatora przedstawiamy poniżej.

Definicja 1.1.12. Niech R będzie pierścieniem i $S \subseteq R$. *Anihilatorem prawostronnym zbioru* S nazywamy zbiór wszystkich elementów $a \in R$, dla których dla każdego $s \in S$ zachodzi $sa = 0$, czyli

$$\operatorname{ann}_r^R(S) = \{a \in R : \ sa = 0 \text{ dla dowolnego } s \in S\}.$$

Łatwo zauważyć, że anihilator zbioru S jest ideałem prawostronnym pierścienia R. Oznaczamy go przez $\operatorname{ann}_r^R(S)$ Analogicznie definiujemy *anihilator lewostronny* $\operatorname{ann}_\ell^R(S)$.

Definicja 1.1.13. Pierścień macierzy kwadratowych $n \times n$ nad pierścieniem R oznaczać będziemy przez $\mathbb{M}_n(R)$. Radykał Jacobsona pierścienia R, czyli przecięcie wszystkich prawostronnych maksymalnych ideałów tego pierścienia, oznaczać będziemy przez $\mathbb{J}(R)$

Definicja 1.1.14. Niech Γ będzie półgrupą. Pierścień A nazywamy Γ *zgradowanym* (lub w skrócie zgradowanym), jeśli $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ gdzie każdy składnik A_γ jest podgrupą addytywną A i zachodzi $A_\gamma \cdot A_\delta \subseteq A_{\gamma\delta}$ dla każdych $\gamma, \delta \in \Gamma$.

Elementy podgrupy addytywnej A_γ nazywać będziemy elementami jednorodnymi stopnia γ, lub pisać $\deg(a) = \gamma$, dla $a \in A_\gamma$.

Rozdział 2

Wprowadzenie do algebr ścieżek Leavitta

2.1 Rys historyczny

Historia algebry ścieżek Leavitta ma dwie całkowicie niezależne genezy. Więcej szczegółów można znaleźć w pracy [1].

Powiemy, że pierścień R posiada własność IBN (ang. *Invariant Basis Number*), jeśli dla dowolnych liczb całkowitych $m, \ k > 0$ fakt, że lewostronne wolne R-moduły R^m i R^k są izomorficzne, implikuje równość $m = k$. Przykładami pierścieni posiadających powyższą własność są liczby całkowite i pierścień macierzy nad ciałem, co motywuje rozważanie powyższej własności.

Przykładem pierścienia, który nie posiada własności IBN jest pierścień B endomorfizmów nieskończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem K. Co więcej nietrudno zauważyć, że dla tego pierścienia wolne lewostronne B-moduły B^m i B^k są izomorficzne dla każdych m i k.

Można zatem zadać pytanie o istnienie pierścieni R, takich że R^m i R^k są izomorficzne jako lewostronne R-moduły (co oznaczamy przez $R^m \cong R^k$) dla pewnych (ale nie wszystkich) $k > m$.

Definicja 2.1.1. Załóżmy, że pierścień R nie ma własności IBN. Niech m będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, taką że $R^m \cong R^k$ dla pewnego $k > m$. Jeżeli n oznacza najmniejsze k spełniające powyższy warunek, to mówimy, że R ma moduł typu (m, n).

Na przykład, wyżej wspomniany pierścień B ma moduł typu $(1, 2)$.

Powołując się na powyższą definicję możemy przeformułować pytanie, czy dla dowolnych m, n, takich że $m < n$ istnieje moduł typu (m, n). Twierdzącą odpowiedź można znaleźć w pracy Leavitta [35].

Twierdzenie 2.1.1 (Leavitt, [35, Theorem 8])**.** *Dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych $n > m$ i dowolnego ciała K, istnieje K-algebra z jedynką $L_K(m, n)$ spełniająca następujące warunki:*

1. *$L_K(m, n)$ ma moduł typu (m, n),*
2. *dla każdej K-algebry A z jedynką posiadającej moduł typu (m, n), istnieje naturalny homomorfizm K-algebr $\phi : L_K(m, n) \to A$.*

Skupimy się teraz na modułach typu $(1, n)$ dla pewnych $n > 1$. W szczególności istnieją izomorfizmy wolnych modułów $\phi \in \mathrm{Hom}_R(R^1, R^n)$ i $\psi \in \mathrm{Hom}_R(R^n, R^1)$, dla których $\psi \circ \phi = 1_R$ i $\phi \circ \psi = 1_{R^n}$. Korzystając z interpretacji homomorfizmów modułów wolnych jako macierzy, możemy stwierdzić, że taki izomorfizm istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wektory $1 \times n$ i $n \times 1$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \text{ oraz } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

dla których

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (1_R)$$

i

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1_R & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1_R \end{pmatrix}.$$

Inaczej mówiąc,

$$_R R^1 \cong_R R^n, \text{ dla pewnego } n > 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $2n$ elementów $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in R$, takich że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R \quad \text{i} \quad y_i x_j = \delta_{ij} 1_R \text{ dla każdych } 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{2.1}$$

Okazuje się, że wyżej wymienione relacje mają bliskie związki z grafowymi C^*-algebrami, co zostało zauważone i wykorzystane w badaniach. Z drugiej strony, powstała potrzeba spojrzenia na grafowe C^*-algebry z czysto algebraicznego punktu widzenia oraz zbadanie pewnych analogii między nimi a algebrą $L_{\mathbb{C}}(1, n)$. Relacje (2.1) odegrały kluczową rolę w konstruowaniu algebr Leavitta, jak również stanowią motywację do ogólniejszej konstrukcji algebr ścieżek Leavitta.

Ze względu na szczególną rolę jaką odgrywają C^*-algebry, zarówno w genezie, jak i w dalszym rozwoju algebr ścieżek Leavitta, przedstawimy ogólny ich zarys. Dostarczony opis C^*-algebr będzie jedynie podstawowy, na tyle wystarczający, aby nawet czytelnik zupełnie z nimi niezaznajomiony mógł zrozumieć ich związek z algebrami ścieżek Leavitta.

Do końca paragrafu, wszystkie algebry będą rozważane nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Algebra A jest $*-$algebrą, jeśli istnieje odwzorowanie $* : A \to A$, takie że dla każdych $x, y \in A$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ zachodzi $(x+y)^* = x^* + y^*$; $(xy)^* = y^* x^*$; $1^* = 1$; $(x^*)^* = x$ i $(\alpha \cdot x)^* = \overline{\alpha} x^*$, gdzie $\overline{\alpha}$ oznacza sprzężenie zespolone α. Przykładem algebry będącej $*-$algebrą jest algebra macierzy $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, dla której $*$ jest sprzężeniem hermitowskim macierzy. Innym przykładem jest pierścień $C(\mathbb{T})$ funkcji ciągłych z koła jednostkowego $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ w $\mathbb{C}$, gdzie $f^*(z) = \overline{f(z)}$, dla $z \in \mathbb{T}$.

C^*-normą w algebrze A nazywa się funkcję $||\cdot|| : A \to \mathbb{R}^+$ spełniającą: $||ab|| \leqslant ||a|| \cdot ||b||$; $||a + b|| \leqslant ||a|| + ||b||$; $||aa^*|| = ||a||^2 = ||a^*||^2$; $||a|| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ i $||\lambda a|| = |\lambda| ||a||$ dla każdych $a, b \in A$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Dla $A = M_n(\mathbb{C})$, C^*-norma na A zadana jest przez normę operatorową, w której elementy $M_n(\mathbb{C})$ traktujemy jako operatory $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ z normą euklidesową w przestrzeni $\mathbb{C}^n$.

C^*-norma w $*-$algebrze A indukuje topologię na A, przez definicję kuli otwartej o środku w $a \in A$ i promieniu r, jako $\{b \in A, \ ||b - a|| < r\}$.

Definicja 2.1.2. C^*-algebrą nazywamy $*-$algebrę A wyposażoną w C^*-normę $|| \cdot ||$, dla której A jest zupełna w topologii indukowanej przez $|| \cdot ||$.

Inne spojrzenie na C^*-algebry pochodzi z teorii operatorów. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $B(\mathcal{H})$ oznacza zbiór ciągłych liniowych operatorów na $\mathcal{H}$. C^*-algebrą jest dowolna zamknięta ze względu na sprzężenia podalgebra A algebry $B(\mathcal{H})$, która jest domknięta ze względu na topologię indukowaną przez normę $B(\mathcal{H})$. Warto dodać, że C^*-algebry mają swoje korzenie we wczesnym rozwoju mechaniki kwantowej. Używane były do modelowania fizycznego.

Na przestrzeni lat pojawiło się wiele pytań odnośnie struktury C^*-algebr. Jedno z takich pytań dotyczyło bezpośredniego opisu ośrodkowych, prostych oraz nieskończonych C^*-algebr. Zostało one rozwiązane w roku 1977 przez Cuntza.

Twierdzenie 2.1.2 (Cuntz, [22, Theorem 1.12])**.** *Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ i zbiór $\{S_i\}_{i=1}^n$ izometrii (to jest $S_i^* S_i = I$) na $\mathcal{H}$. Załóżmy, że $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$. Przez $\mathcal{O}_n$ oznaczmy C^*-algebrę generowaną przez $\{S_i\}_{i=1}^n$. Wtedy $\mathcal{O}_n$ jest ośrodkową, prostą oraz nieskończoną C^*-algebrą.*

W pracy [11] autorzy Ara, Moreno i Pardo rozpatrywali rozszerzenie pojęcia czysto nieskończonych, prostych C^*-algebr w kontekście pierścieni z jedynką. We wprowadzeniu pracy [11] zauważyli, że algebra Cuntza $\mathfrak{O}_n$ jest C^*-dopełnieniem algebry Leavitta $L_{\mathbb{C}}(1,n)$ nad ciałem liczb zespolonych. Motywacją autorów było spojrzenie na grafowe C^*-algebry i opisanie, które kombinatoryczne własności odpowiadają własnościom algebraicznym, a które własnościom analitycznym tej struktury. Jako wynik, w pracy [10] autorzy wprowadzili algebraiczne algebry Cuntza-Kriegera, które okazują się stanowić szczególny przykład algebr ścieżek Leavitta pewnych grafów.

2.2 Algebra ścieżek Leavitta

W pracy *grafem* nazywać będziemy czwórkę $E = (E^0, E^1, s, r)$, gdzie E^0 i E^1 są dowolnymi zbiorami, a r, s funkcjami $s, r \colon E^1 \to E^0$.

Elementy ze zbioru E^0 nazywamy wierzchołkami, a elementy zbioru E^1 nazywamy krawędziami. Jeśli $e \in E^1$ jest dowolną krawędzią grafu E, to $s(e)$ oznacza wierzchołek będący początkiem krawędzi e, natomiast $r(e)$ oznacza wierzchołek będący jej końcem.

Jeżeli wierzchołek jest początkiem skończonej liczby krawędzi, to mówimy, że jest *wierzchołkiem regularnym*.

Przykład 2.2.1. Rozważmy następujący graf E.

$$E = \begin{tikzcd} \bullet^v \arrow[loop above, "e"] & \bullet^u \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"] & \bullet^w \end{tikzcd}$$

Dla grafu E mamy $E^0 = \{v, u, w\}$, $E^1 = \{e, f, g\}$ i $s(e) = r(e) = v$, $s(f) = u$, $r(f) = v$, $s(g) = u$ i $r(g) = w$.

Dla grafu $E = (E^0, E^1, s, r)$ i ciała K, definiujemy algebrę nad ciałem K, której elementami są ścieżki w grafie E. Przedstawiamy tu formalną definicję.

Definicja 2.2.1. Niech K będzie ciałem i niech E będzie grafem. K-algebrą ścieżek nad E nazywamy algebrę ilorazową algebry wolnej $K\langle E^0 \cup E^1\rangle$ przez ideał generowany przez następujące relacje:

(V) $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$ dla każdych $v_i, v_j \in E^0$, gdzie δ_{ij} oznacza symbol Kroneckera,

(E1) $e_i = e_i r(e_i) = s(e_i)e_i$ dla każdego $e_i \in E^1$.

Zauważmy, że istotnie iloczyn krawędzi jest niezerowy tylko wtedy, kiedy tworzą one ścieżkę w grafie:

$$e_i e_j = e_i r(e_i) s(e_j) e_j = e_i \delta_{r(e_i)s(e_j)} e_j.$$

Skoro elementami tej algebry są ścieżki grafu E, to przedstawiamy jeszcze jak będziemy je reprezentować w pracy. *Ścieżką* μ długości n w grafie E nazywamy taki ciąg krawędzi $\mu = e_1 \dots e_n$, $e_i \in E^1, i = 1, 2, \dots, n$, których koniec poprzedniej jest początkiem następnej: $(r(e_i) = s(e_{i+1}))$ dla $i = 1, \dots n-1$. Początek ścieżki μ oznaczamy przez $s(\mu)$ i jest nim wierzchołek $s(e_1)$. Analogicznie, $r(\mu) = r(e_n)$ jest końcem rozważanej ścieżki. Przez $E^0(\mu)$ oznaczamy zbiór wierzchołków v występujących w ścieżce, czyli takich że $v = s(e)$ lub $v = r(e)$ dla pewnej krawędzi występującej w μ. Zbiór ścieżek grafu E oznaczać będziemy przez $\mathrm{Path}(E)$, natomiast długość ścieżki μ będziemy oznaczać przez $|\mu|$ (mamy więc $|\mu| = n$).

W roku 2005 Abrams i Pino w pracy [6] przedstawili rozszerzenie powyższej konstrukcji, najpierw powiększając graf o kopie krawędzi ze zmienionym zwrotem, później definiując dodatkowe relacje, związane kontekstowo z C^*-algebrami.

W dalszej części pracy zbiór krawędzi o zmienionym zwrocie będziemy nazywać krawędziami widmowymi i oznaczać przez $(E^1)^*$.

Definicja 2.2.2. Niech E będzie grafem. Rozszerzeniem grafu E nazywamy graf $\overline{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s')$, gdzie $(E^1)^* = \{e_i^* : e_i \in E^1\}$, oraz r' i s' są określone następująco:

$$r'|_{E^1} = r, \quad s'|_{E^1} = s, \quad r'(e_i^*) = s(e_i), \quad s'(e_i^*) = r(e_i).$$

Algebrą ścieżek Leavitta jest algebra ścieżek grafu $\overline{E}$ rozbudowana o dodatkowe dwie relacje. Pierwsza z nich będzie przypominała relację $y_i x_j = \delta_{ij} 1_R$ z równości (2.1) wprowadzonej we wstępie do rozdziału. Natomiast druga odpowiada relacji $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R$ ze wspomnianego wcześniej wzoru.

Definicja 2.2.3. Niech K będzie ciałem, a E dowolnym grafem. Algebrą ścieżek Leavitta grafu E ze współczynnikami z K nazywamy K-algebrę ścieżek nad $\overline{E}$ z relacjami:

(CK1) $e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j)$ dla każdego $e_j \in E^1$ i $e_i^* \in (E^1)^*$.

(CK2) $v = \sum_{\{e \in E^1 : s(e) = v\}} ee^*$ dla każdego $v \in E^0$ będącego wierzchołkiem regularnym, dla którego istnieje przynajmniej jedna krawędź, której jest on początkiem.

Algebrę ścieżek Leavitta grafu E oznaczać będziemy przez $L_K(E)$.

Przez ścisły związek z C^*-algebrami, relacje (CK1) i (CK2) nazywane są relacjami Cuntza-Kriegera. Ze względu na warunek (CK2) wprowadzimy następujące definicje. Wierzchołki, które nie są początkami żadnych krawędzi nazywać będziemy *ujściami*. Natomiast, wierzchołki, które nie są końcami żadnych krawędzi, nazywamy *źródłami* grafu.

Często interesować nas będą grafy, w których z każdego wierzchołka wychodzi skończona liczba krawędzi lub nie wychodzi żadna krawędź. O takich grafach będziemy mówić, że są *skończonego rzędu.*

Definicja 2.2.4. Mówimy, że graf jest skończonego rzędu, jeżeli dla każdego wierzchołka v zbiór $s^{-1}(v)$ jest skończony.

Na ogół będziemy pracować na grafach skończonego rzędu. W innym przypadku zostanie to wyraźnie zaznaczone.

Ważną i przydatną informacją jest fakt mówiący o tym, jaką postać mają jednomiany w algebrze ścieżek Leavitta.

Lemat 2.2.1 ([6, Lemma 1.5])**.** *Każdy jednomian z $L_K(E)$ jest jednej z postaci*

1. $k_i v_i$, *gdzie* $k_i \in K$ *i* $v_i \in E^0$, *lub*

2. $k e_{i_1} \dots e_{i_\sigma} e_{j_1}^* \dots e_{j_\tau}^*$, *gdzie* $k \in K$, $\sigma, \tau \geqslant 0$, $\sigma + \tau > 0$, $e_{i_s} \in E^1$ *dla* $0 \leqslant s \leqslant \sigma$, $e_{j_t}^* \in (E^1)^*$ *dla* $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Jeśli graf E ma skończoną liczbę wierzchołków $v_1, \ldots, v_n$, to dla dowolnego elementu $a \in L_K(E)$ zachodzi $\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot a = a \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i = a$. Stąd mamy następujący lemat.

Lemat 2.2.2. *Niech E będzie grafem, takim że $|E^0| < \infty$. Wówczas $L_K(E)$ jest algebrą z jedynką.*

Wiele znanych klas algebr nada ciałem K można zrealizować jako algebrę ścieżek Leavitta $L_K(E)$ dla pewnego grafu E.

Przykład 2.2.2. Pokażmy najpierw, że algebra macierzy $n \times n$ jest jednym z takich przykładów. Rozważmy graf $\mathcal{E} = (E^0, E^1, s, r)$, gdzie $E^0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E^1 = \{e_1, \ldots e_{n-1}\}$ oraz

$$s(e_i) = v_i, \quad r(e_i) = v_{i+1}, \text{ dla } i = 1, \ldots, n-1.$$

$$\mathcal{E} = \bullet^{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet^{v_2} \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet^{v_n} \tag{2.2}$$

Po pierwsze, zauważmy, że z każdy wierzchołek oprócz v_n jest początkiem dokładnie jednej krawędzi co powoduje, że warunek (CK2) redukuje się do $v_i = e_i e_i^*$, dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Co więcej, każda ścieżka w grafie $\mathcal{E}$ ma postać $\mu = e_i e_{i+1} \ldots e_j$, $(i \leqslant j)$, a zatem z Lematu 2.2.1 jednomiany w tak utworzonej algebrze ścieżek Leavitta redukują swą postać do jednej z następujących:

1. kv_i,
2. $ke_i e_{i+1} \ldots e_j$, $(j \geqslant i)$,
3. $ke_j^* e_{j-1}^* \ldots e_i^*$, $(j \geqslant i)$,

gdzie $k \in K$, $v_i \in E^0$, $e_p \in E^1$, dla $p \in \{i, i+1, \ldots, j\}$.

Określamy przekształcenie $\phi : L_K(\mathcal{E}) \to \mathbb{M}_n(K)$, które na jednomianach definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} \phi(v_i) &= E(i,i), \\ \phi(e_i \ldots e_j) &= E(i, j+1), \\ \phi(e_j^* \ldots e_i^*) &= E(j+1, i), \end{aligned} \tag{2.3}$$

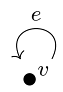
gdzie $E(i,j)$ oznacza macierz, która w i-tym wierszu i j-tej kolumnie ma wartość 1, a pozostałe elementy macierzy są zerami.

Nietrudno jest zauważyć, że rozszerzając ϕ liniowo otrzymujemy izomorfizm algebr.

Warto pamiętać o przykładzie grafu $\mathcal{E}$ ze względu na to, że znane fakty o algebrze macierzy będą stanowiły punkt wyjściowy do części rozważań.

W dalszej części pracy, dla wybranych klas algebr przedstawimy warunki konieczne i wystarczające jakie należy zadać na graf, aby algebra ścieżek Leavitta należała do rozważanej klasy.

Przykład 2.2.3. Kolejnym wartym uwagi przykładem jest graf E składający się z jednego wierzchołka v i jednej pętli e opartej na tym wierzchołku.

$E =$ 

Z Lematu 2.2.1 i Warunku (CK1) dostajemy, że jedynymi niezerowymi elementami $L_K(E)$ są elementy postaci kv, ke^n i $k(e^*)^n$ dla pewnego $k \in K$ i $n \geqslant 0$.

Zauważmy dodatkowo, że z Lematu 2.2.2, v jest elementem neutralnym tej algebry oraz $e^m(e^*)^n = e^{m-n}$, dla $m > n$ i podobnie $(e^*)^n e^m = (e^*)^{n-m}$, dla $n > m$. Dostajemy więc, w naturalny sposób, izomorfizm $\phi : L_K(E) \to K[x, x^{-1}]$ algebry ścieżek Leavitta grafu E i pierścienia wielomianów Laurenta ($\phi(v) = 1, \phi(e) = x, \phi(e^*) = x^{-1}$).

Naszym kolejnym celem będzie opisanie niektórych własności związanych ze ścieżkami w grafie.

Przypomnijmy, że ścieżką jest ciąg elementów zbioru E^1, dlatego w rozszerzonym grafie dla ścieżki $\mu = e_1 \dots e_n$, definiujemy dodatkowo ścieżkę widmową $\mu^* = e_n^* \dots e_1^*$. Oczywiście $s(\mu^*) = s(e_n^*) = r(e_n) = r(\mu)$ i podobnie $r(\mu^*) = s(\mu)$.

Dla uproszczenia oznaczeń definiujemy w zbiorze E^0 relację $\geqslant$ mówiącą o istnieniu ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami. Przyjmiemy, że $v \geqslant w$, jeśli istnieje ścieżka $\mu \in \mathrm{Path}(E)$, taka że $s(\mu) = v$ i $r(\mu) = w$. Będziemy przyjmować także, że dla każdego wierzchołka v istnieje ścieżka pusta, a stąd zawsze zachodzi $v \geqslant v$. Relację tę rozszerzamy do podzbiorów $S \subseteq E^0$, rozumiejąc przez $v \geqslant S$ (odpowiednio $S \geqslant v$), że istnieje wierzchołek $w \in S$, dla którego zachodzi $v \geqslant w$ (odpowiednio istnieje wierzchołek $w \in S$, dla którego $w \geqslant v$).

Przez $H(S)$ będziemy określać zbiór wierzchołków u, takich że $S \geqslant u$. Gdy zbiór S składa się z jednego wierzchołka v, dla czytelności będziemy pisać $H(v)$ zamiast $H(\{v\})$.

Patrząc na postaci jednomianów w algebrze ścieżek Leavitta warto zaobserwować następujący oczywisty lemat.

Lemat 2.2.3. *Niech E będzie grafem. Dla wierzchołków $v, w \in E^0$ istnieją ścieżki μ, ν, takie że $v\mu\nu^*w \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $u \in E^0$, taki że $v \geqslant u$ i $w \geqslant u$ (innymi słowy $H(v) \cap H(w) \neq \emptyset$).*

Dowód. ($\Rightarrow$), jeśli istnieją ścieżki μ, ν, takie że $v\mu\nu^*w \neq 0$, to $s(\mu) = v$ i $r(\mu) = w$, ale $r(\mu) = s(\nu^*) = r(\nu)$, więc niech $r(\mu) = u$, wtedy $v \geqslant u$ i $w \geqslant u$.

($\Leftarrow$), jeśli istnieje $u \in E^0$, taki że $v \geqslant u$ i $w \geqslant u$, to niech μ będzie ścieżką, taką że $s(\mu) = v$ i $r(\mu) = u$, oraz ν będzie ścieżką, taką że $s(\nu) = w$ i $r(\nu) = u$. Wtedy $v\mu\nu^*w \neq 0$. □

Często operować będziemy na ścieżkach, które zaczynają się i kończą w tym samym wierzchołku, dlatego przyjmijmy jeszcze dodatkowe oznaczenia.

Definicja 2.2.5. Zamkniętą ścieżką opartą na wierzchołku v nazywamy ścieżkę $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$, gdzie $\mu_i \in E^1,\ n \geqslant 1$, taką że $s(\mu) = r(\mu) = v$ i fakt ten oznaczamy przez $\mu \in \mathrm{CP}(v)$.

Taka definicja jedynie ogranicza nas do ścieżek, które mają początek i koniec w tym samym wierzchołku v, natomiast nie mówi nic o krawędziach występujących na ścieżce, dlatego możliwe jest, że wierzchołek v był końcem niekoniecznie ostatniej krawędzi ścieżki, dlatego przyjmujemy oznaczenie dodatkowe oznaczenie na takie ścieżki, w których jedynym wystąpieniem v jest początek i koniec ścieżki.

Definicja 2.2.6. Zamkniętą prostą ścieżką opartą na wierzchołku v nazywamy zamkniętą ścieżkę $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$ opartą na v, taką że dla każdego $j > 1,\ s(\mu_j) \neq v$ i przyjmujemy oznaczenie $\mu \in \mathrm{CSP}(v)$.

Dla ścieżek prostych w algebrze Leavitta mamy uogólnienie własności (CK1).

Lemat 2.2.4 ([6, Lemma 2.2])**.** *Niech $\mu,\ \nu \in \mathrm{CSP}(v)$. Wtedy $\mu^*\nu = \delta_{\mu,\nu} r(\mu)$.*

Dowód. Ustalmy dwie dowolne ścieżki $\mu = e_{i_1} \dots e_{i_\sigma}$, $\nu = e_{j_1} \dots e_{j_\tau}$.

Przypadek 1.

Niech $|\mu| = |\nu|$ oraz $\mu \neq \nu$. Niech $b \geqslant 1$ będzie pierwszym indeksem, na którym ścieżki μ i ν się różnią. To znaczy $e_{i_a} = e_{j_a}$ dla każdego $a < b$ i $e_{i_b} \neq e_{j_b}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\mu^*\nu &= e_{i_\sigma}^* \dots e_{i_1}^* e_{j_1} \dots e_{j_\tau} = e_{i_\sigma}^* \dots e_{i_2}^* r(e_{j_1}) e_{j_2} \dots e_{j_\tau} \\ &= \delta_{r(e_{j_1}), s(e_{j_2})} e_{i_\sigma}^* \dots e_{i_2}^* e_{j_2} \dots e_{j_\tau} = \dots \\ &= \delta_{r(e_{j_1}), s(e_{j_2})} \dots \delta_{r(e_{j_{b-1}}), s(e_{j_b})} e_{i_\sigma}^* \dots e_{i_b}^* e_{j_b} \dots e_{j_\tau} = 0.\end{aligned}$$

Przypadek 2.

Niech $\mu = \nu$. Powtarzając powyższe rozumowanie dostajemy

$$\mu^*\nu = \delta_{r(e_{j_1}),s(e_{j_2})} \dots \delta_{r(e_{j_{\sigma-1}}),s(e_{j_\sigma})} r(e_{i_\sigma}) = r(\mu).$$

Przypadek 3.

Niech $|\mu| < |\nu|$. Zatem ν można zapisać w postaci $\nu = \nu_1\nu_2$, gdzie $|\nu_1| = |\mu|$, $|\nu_2| > 0$. Jeżeli $\mu = \nu_1$, to $v = r(\mu) = r(\nu_1) = s(\nu_2)$, co jest sprzeczne z założeniem $\nu \in \mathrm{CSP}(v)$, więc $\mu \neq \nu_1$. Wtedy korzystając z rozumowania z Przypadku 1. mamy $\mu^*\nu = \mu^*\nu_1\nu_2 = 0$.

Gdy $|\mu| > |\nu|$ można powtórzyć rozumowanie analogicznie, zamieniając rolami μ i ν. □

W naturalny sposób wnioskiem z Definicji 2.2.6 jest to, że dowolną ścieżkę zamkniętą opartą na pewnym wierzchołku v możemy rozłożyć na iloczyn zamkniętych ścieżek prostych opartych na tym samym wierzchołku.

Lemat 2.2.5 ([6, Lemma 2.3])**.** *Dla każdego $p \in \mathrm{CP}(v)$ istnieją $c_1, \dots c_m \in \mathrm{CSP}(v)$, takie że $p = c_1 \dots c_m$. Ponadto taki rozkład p na czynniki będące zamkniętymi prostymi ścieżkami jest jednoznaczny.*

Dowód. Niech $p = e_{i_1} \dots e_{i_n}$. Rozważmy zbiór $T = \{t \in \{1, \dots, n\} : r(e_{i_t}) = v\}$ indeksów krawędzi zakończonych w v. Zbiór ten jest niepusty, bo $r(e_{i_n}) = v$. Niech $t_1, \dots, t_m$ będą wszystkimi elementami zbioru T oraz $t_1 < \dots < t_m = n$. Niech $c_1 = e_{i_1} \dots e_{i_{t_1}}$ i dla $j > 1$ $c_j = e_{i_{t_{j-1}+1}} \dots e_{i_{t_j}}$. Wtedy $p = c_1 \dots c_r$.

Załóżmy teraz, że rozkład ten nie jest jednoznaczny, to jest $p = c_1 \dots c_r = d_1 \dots d_s$, gdzie $c_i,\ d_j \in \mathrm{CSP}(v)$. Lewostronnie mnożymy równość przez c_1^*. Dostajemy

$$c_1^* c_1 \dots c_r = c_1^* d_1 \dots d_s.$$

Ponieważ c_1 jest zamkniętą ścieżką prostą, to z Lematu 2.2.4 mamy $c_1^* c_1 = v$, a zatem

$$0 \neq v c_2 \dots c_r = c_1^* d_1 \dots d_s.$$

Powtórnie korzystając z Lematu 2.2.4 i rozważając ścieżki c_1 oraz d_1 zauważamy, że aby spełniona była powyższa równość, ścieżki wspomniane muszą być równe. Powtarzając indukcyjnie rozumowanie dostajemy dla $i = 2, 3, \dots, r$, $c_i = d_i$. Stąd $0 \neq v = d_{r+1} \dots d_s$ oraz $r = s$, co kończy dowód. □

Przykład 2.2.4. Rozważmy graf E zilustrowany poniżej.

$$E = \begin{tikzcd} \bullet^{v_1} \arrow[r, "e_1"] & \bullet^{v_2} \arrow[r, "e_6"] \arrow[d, bend left, "e_2"] & \bullet^{v_5} \arrow[d, "e_7"] \\ \bullet^{v_4} \arrow[u, "e_4"] & \bullet^{v_3} \arrow[l, "e_3"] \arrow[u, bend left, "e_5"] & \bullet^{v_6} \arrow[l, "e_8"] \end{tikzcd}$$

W powyższym grafie E ścieżka $\mu = e_2e_5e_2e_3e_4e_1$ jest zamkniętą ścieżką opartą na v_2, ale nie jest zamkniętą ścieżką prostą (ponieważ $r(e_5) = v_2$).

Dodatkowo $\mu = (e_2e_5) \cdot (e_2e_3e_4e_1)$ i ścieżki e_2e_5 oraz $e_2e_3e_4e_1$ są ścieżkami prostymi opartymi na v_2.

Dla zamkniętej ścieżki $p \in \mathrm{CP}(v)$ określa się *stopień p powrotu do v* jako liczbę m w powyższym rozkładzie p na zamknięte proste ścieżki oparte na v i oznacza przez $\mathrm{RD}(p) = \mathrm{RD}_v(p) = m$.

Definicję tę można rozszerzyć do wierzchołków określając $\mathrm{RD}_v(v) = 0$ oraz do kombinacji liniowych elementów postaci $\sum k_s p_s$, gdzie $p_s \in \mathrm{CP}(v) \cup \{v\}$ i $k_s \in K \setminus \{0\}$ przez $\mathrm{RD}(\sum k_s p_s) = \max_s\{\mathrm{RD}(p_s)\}$.

Zauważmy, że zamknięte ścieżki proste jedynie ograniczają nas do wystąpienia wyróżnionego wierzchołka jednokrotnie, natomiast nie mówimy nic o innych wierzchołkach na ścieżce, istotnie we wcześniej wymienionym Przykładzie 2.2.4 mamy $e_1e_2e_5e_2e_3e_4 \in \mathrm{CSP}(v_1)$.

Zamkniętą ścieżkę $\mu = e_1 \dots e_n$, $e_i \in E^1$ w której dla każdego $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, $s(e_i) \neq s(e_j)$, nazywamy *cyklem*.

Uwaga 2.2.1. Cykl w grafie jest zamkniętą prostą ścieżką opartą na jakimkolwiek wierzchołku z tej ścieżki, ale nie każda zamknięta prosta ścieżka oparta na v jest cyklem, ponieważ może ona przechodzić przez niektóre wierzchołki (różne od v) wielokrotnie.

Jeśli graf nie posiada cykli, wówczas mówimy, że jest on *acykliczny*.

Podczas budowy dowolnych dwóch niepustych ścieżek z tego samego wierzchołka wyróżniać będziemy jeszcze pierwszy moment, w którym te ścieżki się różnią, dlatego przyjmujemy jeszcze jedno oznaczenie.

Definicja 2.2.7. Krawędź e nazywamy *wyjściem* ze ścieżki $\mu = e_1 \dots e_n$, jeżeli istnieje takie $i \in \{1, \dots, n\}$, że $s(e) = s(e_i)$ oraz $e \neq e_i$.

W Przykładzie 2.2.4 dla ścieżki $\mu = e_1e_2e_3e_4$ krawędź e_5 jest wyjściem, ponieważ $s(e_5) = s(e_3)$.

Istnienie wyjścia z dowolnego cyklu w grafie ma szczególne znaczenie w badaniu własności algebry ścieżek Leavitta tego grafu, dlatego przedstawiamy warunki równoważne na to, aby każdy cykl w grafie miał wyjście.

Lemat 2.2.6 ([6, Lemma 2.5])**.** *Dla grafu E następujące warunki są równoważne:*

1. *Każdy cykl ma wyjście.*
2. *Każda zamknięta ścieżka oparta na wierzchołku ma wyjście.*
3. *Każda zamknięta ścieżka prosta oparta na wierzchołku ma wyjście.*
4. *Dla każdego $v_i \in E^0$, jeżeli $\mathrm{CSP}(v_i) \neq \emptyset$, to istnieje ścieżka prosta $c \in \mathrm{CSP}(v_i)$ mająca wyjście.*

Dowód. Implikacje *2* $\Rightarrow$ *3* $\Rightarrow$ *1* wynikają z faktów, że zamknięte ścieżki proste są szczególnymi przypadkami ścieżek zamkniętych oraz cykle są szczególnymi przypadkami zamkniętych ścieżek prostych.

Implikacja *3* $\Rightarrow$ *4* również jest oczywista. Istotnie, jeżeli każda ścieżka prosta oparta na danym wierzchołku v_i ma wyjście, to dla dowolnego wyboru zamkniętej ścieżki prostej $c \in \mathrm{CSP}(v_i)$ mamy spełniony warunek (iv).

1 $\Rightarrow$ *2*. Rozważmy $\mu \in \mathrm{CP}(v_i)$. Z Lematu 2.2.5 μ możemy jednoznacznie zapisać jako iloczyn zamkniętych ścieżek prostych opartych na v_i, to znaczy $\mu = c^{(1)} \dots c^{(m)}$, gdzie $c^{(j)} \in \mathrm{CSP}(v_i)$. Rozważmy ścieżkę $c^{(m)}$. Jeżeli ta ścieżka prosta jest cyklem, to z założenia ma ona wyjście, więc jednocześnie μ ma wyjście. Jeżeli natomiast $c^{(m)}$ nie jest cyklem, to istnieje wierzchołek, który jest końcem więcej niż jednej krawędzi. Zapiszmy zatem $c^{(m)} = e_1 \dots e_t$, gdzie $e_i \in E^1$ i niech e_{i_0} będzie ostatnią krawędzią w c^m, dla której istnieje krawędź w ścieżce $e_1 \dots e_{i_0 - 1}$ wychodząca z tego samego wierzchołka, co e_{i_0}.

Zatem istnieje $i_1 < i_0$, takie że $s(e_{i_0}) = s(e_{s_1})$. Mogą się zdarzyć następujące przypadki:

Przypadek 1. $e_{i_0} = e_{i_1}$ i $i_0 < t$.

Wtedy $r(e_{i_0}) = r(e_{i_1})$, czyli również $s(e_{i_0+1}) = s(e_{i_1+1})$, co jest sprzeczne z wyborem e_{i_0}.

Przypadek 2. $e_{i_0} = e_{i_1}$ i $i_0 = t$.

Wtedy $r(e_{i_1}) = r(e_1) = v_i$, co jest również niemożliwe, ponieważ $c^{(m)} \in \mathrm{CSP}(v_i)$.

Przypadek 3. $e_{i_0} \neq e_{i_1}$.

Wtedy e_{i_1} jest wyjściem dla $c^{(m)}$ i tym samym wyjściem dla μ.

Pozostaje pokazać dowolną implikację z *4*. Pokażemy *4* $\Rightarrow$ *3*. Rozważmy $c^{(1)} \in \mathrm{CSP}(v_i)$. Z założenia można znaleźć taką ścieżkę $c^{(2)} \in \mathrm{CSP}(v_i)$, która ma wyjście. Możemy założyć, że $c^{(1)} \neq c^{(2)}$, ponieważ w przypadku równości mamy oczywiście wyjście ze ścieżki. Niech zatem $c^{(1)} = e_{i_1} \dots e_{i_s}$ i $c^{(2)} = e_{j_1} \dots e_{j_r}$.

Jeżeli $e_{i_1} \neq e_{j_1}$, to e_{j_1} jest wyjściem dla c^1, ponieważ $s(e_{i_1}) = s(e_{j_1}) = v_i$. Jeżeli natomiast $e_{i_1} = e_{j_1}$, to również $r(e_{i_1}) = r(e_{j_1})$. Zatem $s(e_{i_2}) = s(e_{j_2})$, więc ponownie jeżeli $e_{i_2} \neq e_{j_2}$, to jak w kroku pierwszym e_{j_2} jest wyjściem dla $c^{(1)}$, a jeśli są równe to kontynuujemy rozumowanie dla kolejnych krawędzi.

Przeprowadzając rozumowanie, możemy więc albo napotkać wyjście, albo przejść przez wszystkie krawędzie jedynie jednej ze ścieżek (nie obu, ponieważ $c^{(1)} \neq c^{(2)}$). Zatem:

Przypadek 1. $c^{(1)} = c^{(2)} e_{i_t} \dots e_{i_s}$, dla pewnego $t \leqslant s$. Ponieważ $s(e_{i_t}) = r(c^{(2)}) = v_i$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem $c^{(1)} \in \mathrm{CSP}(v_i)$.

Podobnie, **Przypadek 2.** $c^{(2)} = c^{(1)} e_{j_q} \dots e_{j_r}$, dla $q \leqslant r$ również otrzymujemy sprzeczność z założeniem $c^{(2)} \in \mathrm{CSP}(v_i)$.

Zatem dla dowolnej zamkniętej ścieżki prostej $c^{(1)} \in \mathrm{CSP}(v_i)$ znaleźliśmy wyjście, co kończy dowód ostatniej implikacji. $\square$

Rozważmy dowolną algebrę ścieżek Leavitta $L_K(E)$. Dla każdej liczby całkowitej $n \in \mathbb{Z}$ definiujemy $L_K(E)_n := span\{\mu\nu^* : |\mu| - |\nu| = n,\ \mu, \nu \in \mathrm{Path}(E)\}$. Wykorzystując Lemat 2.2.1 widzimy, że $L_K(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}\, K}(E)_n$. Natomiast przyglądając się mnożeniu w algebrze ścieżek Leavitta zauważamy, że powyższy fakt, prowadzi do $\mathbb{Z}$-gradacji na $L_K(E)$, gdzie $L_K(E)_n$ stanowi składnik jednorodny stopnia n. Elementy algebry $L_K(E)$ należące do zbioru $L_K(E)_n$ nazywamy jednorodnymi stopnia n lub po prostu jednorodnymi.

Rozdział 3

Własności anihilatorowe w algebrze ścieżek Leavitta

Na podstawie pracy [14].

3.1 Algebry ścieżek Leavitta posiadające Własność (A)

Mówimy, że pierścień przemienny R posiada *Własność (A)*, jeśli każdy skończenie generowany ideał pierścienia R składający się wyłącznie z dzielników zera ma niezerowy anihilator.

Pierścieniami przemiennymi posiadającymi Własność (A) są między innymi pierścienie noetherowskie. Własność ta była badana przez wielu autorów (zob. [9], [12], [27], [31], [30], [34], [36], [45]).

W pracy [29] Hong wraz z innymi autorami rozszerzyli pojęcie Własności (A) na pierścienie nieprzemienne. Pierścień R posiada *prawostronną (lewostronną) Własność (A)*, jeśli każdy skończenie generowany ideał dwustronny R, składający się z lewostronnych (prawostronnych) dzielników zera, ma niezerowy prawostronny (lewostronny) anihilator. Pierścień R posiada Własność (A), jeśli posiada zarówno lewo- jak i prawostronną Własność (A). W tej samej pracy [29, Example 1.2] pokazany został przykład na to, że jednostronna Własność (A) nie jest symetryczna.

Kolejną własnością, związaną z Własnością (A) (zarówno w przemiennym [31], [36], jak i w nieprzemiennym przypadku [28], [52]), jest tak zwany warunek anihilatorowy.

Mówimy, że pierścień R spełnia *prawostronny warunek anihilatorowy* (ang. *annihilator* *condition*; piszemy, że R spełnia (prawostronny) warunek (a.c.)) jeśli dla dowolnego skończenie generowanego ideału dwustronnego T pierścienia R istnieje taki element c, że $\operatorname{ann}_r^R(T) = \operatorname{ann}_r^R(RcR)$. Równoważnie, powołując się na uwagę [28, Remark 1(2)], wystarczy aby dla dowolnego ideału prawostronnego generowanego przez dwa elementy $T = aR + bR$ pierścienia R, istniał element $c \in R$, taki że $\operatorname{ann}_r^R(T) = \operatorname{ann}_r^R(cR)$. Podobnie definiuje się lewostronny warunek anihilatorowy.

Powiemy, że pierścień R jest *prawostronnie Bézout*, jeśli każdy skończenie generowany ideał prawostronny pierścienia R jest główny. Podobnie definiujemy pierścienie lewostronnie Bézout. Ponadto mówimy, że R jest *Bézout*, jeśli jest lewo- i prawostronnie Bézout.

W pracy [4] zostało pokazane, że dla grafu E i ciała K, w algebrze ścieżek Leavitta $L_K(E)$, wszystkie skończenie generowane ideały jednostronne są główne. Zatem dla dowolnego grafu E algebra ścieżek Leavitta $L_K(E)$ jest Bézout.

Przemienne pierścienie Bézout posiadają Własność (A), dlatego naturalne jest pytanie o Własność (A) w kontekście algebr ścieżek Leavitta.

Następujące rozważania będą prowadzić do pełnej odpowiedzi na postawiony wyżej problem. Mianowicie, wskażemy warunki konieczne i wystarczające jakie powinien spełniać graf E, aby algebra ścieżek Leavitta $L_K(E)$ posiadała Własność (A). Dzięki pełnemu opisowi tych warunków będziemy w stanie wskazać przykład nieprzemiennej algebry, która jest Bézout i nie posiada ani lewo-, ani prawostronnej Własności (A).

W pracy [21, Theorem 8] zostało pokazane, że każdy ideał V algebry ścieżek Leavitta $L_K(E)$ jest generowany przez elementy postaci $v + \sum_{i=1}^{q} k_i \pi^i$ dla pewnego $q \geqslant 1$, gdzie $v \in E^0$, a π jest cyklem opartym na v i $k_i \in K$. Zbiór generatorów tej postaci oznaczmy przez T. Same generatory będziemy zapisywać pomijając wskaźnik sumowania, czyli jako $v + \sum_i k_i \pi^i$. Dodatkowo wyróżnijmy zbiór wierzchołków będących składnikami elementów T, to znaczy

$$E_T^0(V) = \left\{ v \in E^0 : v + \sum_i k_i \pi^i \in T \text{ dla pewnego cyklu } \pi \text{ opartego na } v \right\}.$$

Twierdzenie 3.1.1. *Niech E będzie grafem skończonego rzędu, niech K będzie ciałem oraz niech V będzie niezerowym ideałem algebry $L_K(E)$. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Prawostronny anihilator V jest zerowy;* $\operatorname{ann}_r^{L_K(E)}(V) = 0$.

2. *Lewostronny anihilator V jest zerowy;* $\operatorname{ann}_\ell^{L_K(E)}(V) = 0$.

3. *Dla dowolnego zbioru T generatorów ideału V, składającego się z elementów postaci $v + \sum_i k_i\pi^i$, gdzie $v \in E^0$, π jest cyklem opartym na v i $k_i \in K$, i dla dowolnego wierzchołka $u \in E^0$, zachodzi $H(E^0_T(V)) \cap H(u) \neq \emptyset$.*

Dowód. 1 ⇒ 3. Niech V będzie ideałem $L_K(E)$, takim że $\mathrm{ann}_r^{L_K(E)}(V) = 0$. Załóżmy nie wprost, że dla pewnego zbioru T elementów postaci $v + \sum_i k_i\pi^i$ generującego ideał V zachodzi $H(E^0_T(V)) \cap H(u) = \emptyset$ dla pewnego $u \in E^0$.

Biorąc dowolny element $v + \sum_i k_i g^i \in T$ oraz dowolny jednomian $\mu\nu^*$ mamy $(v+\sum_i k_i g^i)\mu\nu^* u = 0$. Istotnie, $v\mu\nu^* u = 0$, ponieważ w przeciwnym przypadku $r(\mu) = s(\nu^*)$, więc $H(E^0_T(V)) \cap H(u) \neq \emptyset$, co jest sprzeczne z założeniem. W podobny sposób stwierdzamy również, że dla każdego i zachodzi $g^i\mu\nu^* u = 0$.

3 ⇒ 1. Załóżmy, że *3* zachodzi oraz $Q = \mathrm{ann}_r^{L_K(E)}(V)$ nie jest zerowy. Zauważmy, że Q jest ideałem $L_K(E)$. Niech $u + \sum_j r_j\xi^j$ będzie jednym z niezerowych elementów generujących Q, (gdzie u jest wierzchołkiem i cykl ξ jest oparty na u). Z założenia istnieje $v + \sum_i k_i\pi^i \in V$, taki że dla pewnego $w \in E^0$, $v \geqslant w$ i $u \geqslant w$. Niech α, β będą ścieżkami, takimi że $s(\alpha) = u$, $r(\alpha) = w$ oraz $s(\beta) = v$, $r(\beta) = w$. Ponieważ algebra $L_K(E)$ jest $\mathbb{Z}$-zgradowana oraz

$$\left(v + \sum_i k_i\pi^i\right)\beta\alpha^*\left(u + \sum_j r_j\xi^j\right) = 0,$$

mamy $\beta\alpha^* = v\beta\alpha^* u = 0$, co daje sprzeczność. Zatem $Q = 0$.

Równoważność *2* ⇔ *3* można pokazać w analogiczny sposób. □

Inny dowód wspomnianego wyżej twierdzenia wykorzystuje fakt, że algebra $L_K(E)$ jest nieosobliwa (zob. [2, Proposition 2.3.7]).

W pracy [44, Cororally 3.5] pokazano, że jeśli E jest skończonym grafem acyklicznym, to $L_K(E)$ jest izomorficzna z sumą prostą algebr macierzy nad K, to znaczy $L_K(E) \cong \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{M}_{n_t}(K)$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych $t, n_1, \dots n_t$. Zatem, w takim przypadku z [29, Proposition 1.3] algebra $L_K(E)$ posiada Własność (A). W związku z powyższym, w tym rozdziale jeśli rozważamy grafy o skończonej liczbie wierzchołków, to zakładamy, że posiadają one przynajmniej jeden nietrywialny cykl.

Lemat 3.1.2. *Niech E będzie grafem skończonego rzędu o skończonym zbiorze E^0 oraz niech K będzie ciałem. Jeśli E ma cykl π oraz wierzchołek $v \in E^0$, taki że $E^0(\pi) \geqslant v$ i $v \ngeqslant E^0(\pi)$, to $L_K(E)$ nie posiada ani prawo-, ani lewostronnej Własności (A).*

Dowód. Niech v będzie wierzchołkiem oraz π będzie cyklem opartym na wierzchołku v', spełniającym powyższe warunki. Niech ϵ będzie ścieżką, taką że $s(\epsilon) = v'$ oraz $r(\epsilon) = v$. Niech

$$P(v) = \{w \in E^0 : w \geqslant H(v)\}.$$

Dla $T = E^0 \setminus P(v)$ rozważmy ideał V algebry $L_K(E)$ generowany przez zbiór $\{v\} \cup T$. Zauważmy, że zachodzi $E^0(\pi) \subseteq P(v)$. Niech x będzie niezerowym elementem V, i

$$x = k_v v + \sum_{q\in T} k_q q + \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \overline{\alpha_i}^* \cdot v \cdot \beta_i \overline{\beta_i}^* + \sum_{p\in T}\sum_{j=1}^{m_p} k_{pj}\sigma_{pj}\overline{\sigma_{pj}}^* \cdot p \cdot \delta_{pj}\overline{\delta_{pj}}^*,$$

gdzie $\alpha_i, \overline{\alpha_i}, \beta_i, \overline{\beta_i}, \sigma_{pj}, \overline{\sigma_{pj}}, \delta_{pj}, \overline{\delta_{pj}}$ są ścieżkami (możliwe, że pustymi), k_μ, $k_{\zeta\eta}$ są elementami ciała K oraz n, m_p dodatnimi liczbami całkowitymi. Niech

$$\overline{s} = \max(\{|\overline{\beta_i}| : i = 1, \ldots, n\} \cup \{|\overline{\delta_{pj}}| : p \in T, j = 1, \ldots, m_p\}),$$

oraz niech

$$s = \max(\{|\beta_i| : i = 1, \ldots, n\} \cup \{|\delta_{pj}| : p \in T, j = 1, \ldots, m_p\}).$$

Weźmy $p \in T$ i $j \in \{1, \ldots, m_p\}$ i rozważmy iloczyn

$$\sigma_{pj}\overline{\sigma_{pj}}^* \cdot p \cdot \delta_{pj}\overline{\delta_{pj}}^* \pi^{2\overline{s}}. \tag{3.1}$$

Ponieważ $|\overline{\delta_{pj}}| \leqslant \overline{s}$ i $|\pi^{2\overline{s}}| \geqslant 2\overline{s}$, możemy stwierdzić, że albo iloczyn (3.1) jest równy 0 albo istnieje ścieżka γ, taka że

$$\sigma_{pj}\overline{\sigma_{pj}}^* \cdot p \cdot \delta_{pj}\overline{\delta_{pj}}^* \pi^{2\overline{s}} = \sigma_{pj}\overline{\sigma_{pj}}^* \cdot p \cdot \gamma \cdot \pi \neq 0.$$

W takim przypadku mamy $p \geqslant v' \geqslant v$, co oznacza, że $p \in P(v)$, sprzeczność. Czyli

$$\left(\sum_{p\in T}\sum_{j=1}^{m_p} k_{pj}\sigma_{pj}\overline{\sigma_{pj}}^* \cdot p \cdot \delta_{pj}\overline{\delta_{pj}}^*\right) \cdot \pi^{2\overline{s}} = 0.$$

Używając podobnych argumentów otrzymujemy, że

$$k_v v \cdot \pi^{2\overline{s}} = \left(\sum_{q\in T} k_q q\right) \cdot \pi^{2\overline{s}} = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \overline{\alpha_i}^* \cdot v \cdot \beta_i\right) \cdot \pi^{2\overline{s}} = 0,$$

czyli ostatecznie $x \cdot \pi^{2\overline{s}} = 0$.

Powtarzając powyższą argumentację, można również udowodnić, że zachodzi $(\pi^{2\overline{s}})^* \cdot x = 0$. Zatem dowolny element ideału V jest lewo- i prawostronnym dzielnikiem zera.

Łatwo zobaczyć, że z Twierdzenia 3.1.1 $\operatorname{ann}_r^{L_K(E)}(V) = 0 = \operatorname{ann}_\ell^{L_K(E)}(V)$, co implikuje, że algebra ścieżek $L_K(E)$ nie ma ani prawostronnej ani lewostronnej Własności (A). $\square$

Inspirując się pracą [43, Definition 2.1] przedstawiamy następującą definicję.

Definicja 3.1.1. Niech E będzie grafem skończonego rzędu. Załóżmy, że istnieją podzbiory E_1^0, E_2^0, E_3^0 zbioru wierzchołków E^0, spełniające następujące warunki:

(i) $E_1^0 \cup E_2^0 \cup E_3^0 = E^0$,

(ii) $E_i^0 \cap E_j^0 = \emptyset$ dla $i \neq j$,

(iii) E_1^0 jest niepustym zbiorem i E_3^0 jest skończony,

(iv) $E_1^0 \not\geqslant E_2^0 \cup E_3^0$ i $E_2^0 \not\geqslant E_1^0 \cup E_3^0$,

(v) dla każdego $v \in E_3^0$ zachodzi $v \geqslant E_1^0$ i $v \geqslant E_2^0$,

(vi) dla każdego cyklu π w grafie E zachodzi $E^0(\pi) \subseteq E_1^0 \cup E_2^0$.

Wtedy trójkę (E_1^0, E_2^0, E_3^0) nazywać będziemy trójpodziałem E^0.

Jeżeli graf E jest skończonego rzędu, to trójpodział $(E^0, \emptyset, \emptyset)$ nazywać będziemy trójpodziałem trywialnym.

Przykład 3.1.1. Rozważmy graf

$$E = \begin{tikzcd}
s \arrow[loop above, "\tau"] & t_1 \arrow[l] \arrow[r] & v \arrow[loop above] & u_1 \arrow[l] \arrow[r] & w_1 \arrow[loop above, "\lambda"] \arrow[r, bend left] & w_2 \arrow[l, bend left] \arrow[loop right] \\
& t_2 \arrow[u] & & u_2 \arrow[u] & w_3 \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}.$$

Dla E mamy co najmniej dwa różne trójpodziały. Mianowicie trójpodział (E_1^0, E_2^0, E_3^0), gdzie $E_1^0 = \{w_1, w_2, w_3\}$, $E_2^0 = \{v, t_1, t_2, s\}$ i $E_3^0 = \{u_1, u_2\}$ oraz trójpodział $(\overline{E}_1^0, \overline{E}_2^0, \overline{E}_3^0)$, gdzie $\overline{E}_1^0 = \{s\}$, $\overline{E}_2^0 = \{v, u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ i $\overline{E}_3^0 = \{t_1, t_2\}$.

Uwaga 3.1.1. Przedstawiamy teraz następujące spostrzeżenia dotyczące Definicji 3.1.1, które w przypadku podpunktów (a) i (b) można łatwo zinterpretować w odniesieniu do Przykładu 3.1.1.

(a) Zauważmy, że podpunkty (*iv*) i (*vi*) mówią, że dla dowolnego cyklu π w grafie E, trójpodział E^0 zadaje albo $E^0(\pi) \geqslant E_1^0$ albo $E^0(\pi) \geqslant E_2^0$.

(b) Trójpodział E^0 nie jest wyznaczony jednoznacznie.

(c) Zauważmy, że jeśli $E_2^0 = \emptyset$, to również $E_3^0 = \emptyset$. Z drugiej strony, jest możliwe żeby $E_3^0 = \emptyset$ i $E_2^0 \neq \emptyset$. W takim przypadku graf E nie jest spójny i za pomocą znanych faktów ([2, Proposition 1.2.14]) mamy $L_K(E) \cong L_K(F_1) \times L_K(F_2)$, gdzie dla $i = 1, 2$, F_i jest podgrafem E, takim że $F_i^0 = E_i^0$ i F_i^1 jest zbiorem wszystkich krawędzi e, dla których $s(e), r(e) \in E_i^0$.

Stwierdzenie 3.1.3. *Jeśli E jest grafem skończonego rzędu i (E_1^0, E_2^0, E_3^0) jest trójpodziałem E^0, który nie jest trywialny, to istnieją właściwe podgrafy $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ grafu E, takie że $L_K(E) \cong L_K(\mathcal{E}_1) \times L_K(\mathcal{E}_2)$.*

Dowód. Korzystając z Uwagi 3.1.1(c), w przypadku gdy E_3^0 jest zbiorem pustym, teza zachodzi. Dlatego w dalszej części dowodu będziemy przyjmować, że E_3^0 nie jest pustym zbiorem, co oczywiście implikuje, że E_2^0 także jest niepusty.

Niech dla $i = 1, 2, 3$,

$$E_i^1 = \{e \in E^1 : \ r(e) \in E_i^0\}.$$

Wtedy $E_i^i \cap E_j^i = \emptyset$ dla każdego $i \neq j$ oraz $E_1^1 \cup E_2^1 \cup E_3^1 = E^1$.

Zauważmy, że dla krawędzi e należącej do E_1^1 zachodzi $r(e) \in E_1^0$, co daje również, że $s(e) \in E_1^0 \cup E_3^0$. W przypadku, gdy $e \in E_3^1$, zachodzi $s(e), r(e) \in E_3^0$. Zatem $\mathcal{E}_1 = (E_1^0 \cup E_3^0, E_1^1 \cup E_3^1)$ jest właściwym podgrafem E. Z podobnych powodów również właściwym podgrafem E jest $\mathcal{E}_2 = (E_2^0 \cup E_3^0, E_2^1 \cup E_3^1)$. Pokażemy, że dla $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ mamy $L_K(E) \cong L_K(\mathcal{E}_1) \times L_K(\mathcal{E}_2)$.

Definiujemy odwzorowanie $\phi : L_K(E) \to L_K(\mathcal{E}_1) \times L_K(\mathcal{E}_2)$ na generatorach $L_K(E)$ wzorami:

$$\phi(v) = \begin{cases} (v, 0), & \text{dla } v \in E_1^0, \\ (0, v), & \text{dla } v \in E_2^0, \\ (v, v), & \text{dla } v \in E_3^0, \end{cases}$$

$$\phi(e) = \begin{cases} (e, 0), & \text{dla } e \in E_1^1, \\ (0, e), & \text{dla } e \in E_2^1, \\ (e, e), & \text{dla } e \in E_3^1, \end{cases}$$

$$\phi(e^*) = \begin{cases} (e^*, 0), & \text{dla } e \in E_1^1, \\ (0, e^*), & \text{dla } e \in E_2^1, \\ (e^*, e^*), & \text{dla } e \in E_3^1. \end{cases}$$

Następnie na dowolnym jednomianie $\mu\nu^* \in L_K(E)$, gdzie $\mu = e_1 \dots e_\sigma$, $\nu = f_1 \dots f_\tau$ określamy ϕ wzorem $\phi(\mu\nu^*) = \phi(e_1)\dots\phi(e_\sigma)\phi(f_1^*)\dots\phi(f_\tau^*)$. Na koniec ϕ rozszerzamy liniowo na całe $L_K(E)$. Podobny izomorfizm był rozważany w pracy [43, Proposition 2.4].

Pokażemy, że ϕ zachowuje relacje algebry ścieżek Leavitta w $L_K(E)$, co da nam, że ϕ jest homomorfizmem algebr.

Niech $e \in E_3^1$. Wtedy $r(e) \in E_3^0$, więc także $s(e) \in E_3^0$. Zatem otrzymujemy $\phi(s(e)e) = \phi(e) = \phi(er(e))$. Podobne argumenty pokazują, że ϕ zachowuje rozważane relacje dla e^* oraz krawędzi należących do $E_1^1 \cup E_2^1$ i ich widmowych odpowiedników.

Oczywiście, dla krawędzi e, e' jeśli $e \neq e'$, to $\phi(e^*e') = 0$. Natomiast dla krawędzi e zachodzi $\phi(e^*e) = \phi(r(e))$. Jeśli $e \in E_1^1$, to $r(e) \in E_1^0 \subseteq \mathcal{E}_1^0$ i $\phi(e^*e) = \phi(e^*)\phi(e) = (e^*,0)(e,0) = (e^*e,0) = (r(e),0) = \phi(r(e))$. To samo zachodzi dla $e \in E_2^1$. Dla $e \in E_3^1$ mamy $r(e) \in E_3^0$. Ponieważ $E_3^0 \subseteq \mathcal{E}_1^0 \cap \mathcal{E}_2^0$ i $E_3^1 \subseteq \mathcal{E}_1^1 \cap \mathcal{E}_2^1$, mamy $\phi(e^*e) = \phi(e^*)\phi(e) = (e^*,e^*)(e,e) = (e^*e,e^*e) = (r(e),r(e)) = \phi(r(e))$.

Załóżmy, że v jest wierzchołkiem grafu E, który nie jest ujściem. Wtedy w $L_K(E)$ mamy

$$v = \sum_{\{e \in E^1 : s(e) = v\}} ee^*.$$

Zajmijmy się tylko przypadkiem $v \in E_3^0$, ponieważ pozostałe sytuacje są analogiczne w rozważaniu. Niech $e_1, \dots, e_k$ będą wszystkimi krawędziami, dla których $s(e_i) = v$ i $r(e_i) \in E_1^0$, niech $f_1, \dots, f_t$ będą wszystkimi krawędziami, dla których $s(f_j) = v$ i $r(f_j) \in E_2^0$ oraz niech $h_1, \dots, h_s$ będą wszystkimi krawędziami, dla których $s(h_\ell) = v$ i $r(h_\ell) \in E_3^0$. Wtedy

$$v = \sum_{i=1}^{k} e_i e_i^* + \sum_{j=1}^{t} f_j f_j^* + \sum_{\ell=1}^{s} h_\ell h_\ell^*,$$

i z definicji przekształcenia ϕ mamy

$$\begin{aligned}\phi\Bigg(\sum_{i=1}^{k} e_i e_i^* + \sum_{j=1}^{t} f_j f_j^* + \sum_{\ell=1}^{s} h_\ell h_\ell^*\Bigg) &= \Bigg(\sum_{i=1}^{k} e_i e_i^* + \sum_{\ell=1}^{s} h_\ell h_\ell^*, \sum_{j=1}^{t} f_j f_j^* + \sum_{\ell=1}^{s} h_\ell h_\ell^*\Bigg) \\ &= (v,v) = \phi(v)\end{aligned}$$

Co daje, że ϕ jest dobrze zdefiniowanym homomorfizmem K-algebr.

Chociaż różnowartościowość ϕ można wykazać korzystając z *Graded Uniqueness Theorem* (zob. [2, Theorem 2.2.15]), to przez wzgląd na kompletność wywodu, dostarczamy dowód tego faktu poniżej.

Do dowodu różnowartościowości ϕ potrzebować będziemy następującego spostrzeżenia: dla ścieżek σ, δ w $L_K(E)$, jeśli dla $p \in \{1,2\}$ krawędź $e \in E_p^1$ jest czynnikiem $\sigma \cdot \delta^*$, to każdy czynnik $\sigma \cdot \delta^*$ pochodzi z $E_p^1 \cup E_3^1$.

Załóżmy teraz nie wprost, że istnieje niezerowy element $x \in L_K(E)$, taki że $\phi(x) = 0$. Zauważmy, że

$$x = \sum_i k_{1i} u_i + \sum_j k_{2j} v_j + \sum_t k_{3t} w_t + \sum k_1 \alpha_1 \beta_1^* + \sum k_2 \alpha_2 \beta_2^* + \sum k_3 \alpha_3 \beta_3^*,$$

gdzie k_{pq}, k_g są elementami ciała K i dla dowolnych i, j, t, odpowiednio $u_i \in E_1^0$, $v_j \in E_2^0$, $w_t \in E_3^0$. Dodatkowo, dla dowolnego $\alpha_1 \beta_1^*$ co najmniej jeden czynnik pochodzi z E_1^1, dla dowolnego $\alpha_2 \beta_2^*$ co najmniej jeden czynnik pochodzi z E_2^1 i dla dowolnego $\alpha_3 \beta_3^*$ wszystkie czynniki pochodzą z E_3^1.

Z definicji ϕ, mamy $\phi(x) = (a, b)$, gdzie

$$a = \sum_i k_{1i} u_i + \sum_t k_{3t} w_t + \sum k_1 \alpha_1 \beta_1^* + \sum k_3 \alpha_3 \beta_3^*,$$
$$b = \sum_j k_{2j} v_j + \sum_t k_{3t} w_t + \sum k_2 \alpha_2 \beta_2^* + \sum k_3 \alpha_3 \beta_3^*,$$

i ponieważ $\phi(x) = 0$, to również $a = b = 0$. Jako, że $a = 0$, to $x = \sum_j k_{2j} v_j + \sum k_2 \alpha_2 \beta_2^*$. Ponieważ w $\alpha_2 \beta_2^*$ jest krawędź pochodząca z E_2^1, z definicji ϕ mamy

$$\phi(x) = \phi(\sum_j k_{2j} v_j + \sum k_2 \alpha_2 \beta_2^*) = (0, \ \sum_j k_{2j} v_j + \sum k_2 \alpha_2 \beta_2^*),$$

co implikuje, że również $x = 0$, sprzeczność. Czyli ϕ jest przekształceniem różnowartościowym.

Do pokazania pozostało, że ϕ jest suriekcją. Pokażemy, że dla dowolnego $v \in E_3^0$ istnieją a i b, takie że $\phi(a) = (v, 0)$ i $\phi(b) = (0, v)$. Niech

$$D_0 = \{v \in E_3^0 : \text{ jeśli dla krawędzi } e, s(e) = v, \text{ to } r(e) \in E_1^0 \cup E_2^0\}.$$

Nietrudno zauważyć, że jeśli E_3^0 jest niepusty, to D_0 także jest niepusty. Niech k będzie liczbą naturalną i załóżmy, że zdefiniowaliśmy już $D_0, \ldots D_{k-1}$. Definiujemy D_k następująco:

$$D_k = \Bigg\{ v \in E_3^0 \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} D_i : \text{ dla każdej krawędzi } e, \text{ takiej że } s(e) = v,$$
$$\text{zachodzi } r(e) \in E_1^0 \cup E_2^0 \cup D_0 \cup \ldots D_{k-1} \Bigg\}.$$

Z Definicji 3.1.1 (iii) zbiór E_3^0 jest skończony i istnieje taka liczba całkowita ℓ, że zbiory $D_0, \ldots, D_\ell$ są niepuste oraz $D_{\ell+1} = D_{\ell+2} = \ldots = \emptyset$. Warto zauważyć, że $D_0 \cup \ldots \cup D_\ell = E_3^0$.

Weźmy $v \in D_0$ i niech $e_1, \ldots, e_n$ będą wszystkimi krawędziami, takimi że $s(e_i) = v$ i $r(e_i) \in E_1^0$ oraz niech $f_1, \ldots, f_m$ będą wszystkimi krawędziami, takimi że $s(f_j) = v$ i $r(f_j) \in E_2^0$. Wtedy $v = \sum_{i=1}^n e_i e_i^* + \sum_{j=1}^m f_j f_j^*$ oraz $\phi(\sum_{i=1}^n e_i e_i^*) = (\sum_{i=1}^n e_i e_i^*, 0) = (v, 0)$. Podobnie $\phi(\sum_{j=1}^m f_j f_j^*) = (0, v)$.

Załóżmy teraz, że dla pewnej liczby naturalnej k, jeśli $v' \in D_0 \cup \ldots D_{k-1}$, to istnieją $a, b \in L_K(E)$, takie że $\phi(a) = (v', 0)$ i $\phi(b) = (0, v')$ i załóżmy, że $D_k \neq \emptyset$. Rozważmy wierzchołek $v \in D_k$. Wtedy istnieją wierzchołki $v'_1, \ldots, v'_t \in D_0 \cup \ldots D_{k-1}$, takie że dla dowolnego v'_j istnieje krawędź $\overline{h_j}$, $j = 1, \ldots, t$, taka że $s(\overline{h_j}) = v$ i $r(\overline{h_j}) = v'_j$ oraz istnieje krawędź, której początkiem jest v a końcem jest wierzchołek z $E_1^0 \cup E_2^0$. Co więcej, dla dowolnego $j = 1, \ldots, t$, istnieją $a_j, b_j \in L_K(E)$, takie że $\phi(a_j) = (v'_j, 0)$, $\phi(b_j) = (0, v'_j)$. Zauważmy, że $\phi(a_j v'_j + b_j v'_j) = \phi(a_j)\phi(v'_j) + \phi(b_j)\phi(v'_j) = (v'_j, 0)(v'_j, v'_j) + (0, v'_j)(v'_j, v'_j) = (v'_j, v'_j) = \phi(v'_j)$ co oznacza, że $a_j v'_j + b_j v'_j = v'_j = v'_j a_j v'_j + v'_j b_j v'_j$ dla każdego j.

Niech $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$ będą wszystkimi krawędziami, dla których $s(\overline{e_i}) = v$ i $r(\overline{e_i}) \in E_1^0$, oraz niech $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m}$ będą wszystkimi krawędziami, dla których $s(\overline{f_j}) = v$ i $r(\overline{f_j}) \in E_2^0$. Wtedy

$$\begin{aligned} v &= \sum_i \overline{e_i} \cdot \overline{e_i}^* + \sum_j \overline{f_j} \cdot \overline{f_j}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot \overline{h_\ell}^* \\ &= \sum_i \overline{e_i} \cdot \overline{e_i}^* + \sum_j \overline{f_j} \cdot \overline{f_j}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot (v'_\ell a_\ell v'_\ell + v'_\ell b_\ell v'_\ell) \overline{h_\ell}^* \\ &= \sum_i \overline{e_i} \cdot \overline{e_i}^* + \sum_j \overline{f_j} \cdot \overline{f_j}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot (v'_\ell a_\ell v'_\ell) \cdot \overline{h_\ell}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot (v'_\ell b_\ell v'_\ell) \cdot \overline{h_\ell}^*, \end{aligned}$$

co daje, że

$$\phi(v) = \left(\sum_i \overline{e_i} \cdot \overline{e_i}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot (v'_\ell a_\ell v'_\ell) \cdot \overline{h_\ell}^*, \sum_j \overline{f_j} \cdot \overline{f_j}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot (v'_\ell b_\ell v'_\ell) \cdot \overline{h_\ell}^* \right).$$

Jako że $\phi(v) = (v, v)$ mamy, że w $L_K(\mathcal{E}_1)$, $v = \sum_i \overline{e_i} \cdot \overline{e_i}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot (v'_\ell a_\ell v'_\ell) \cdot \overline{h_\ell}^*$ oraz w $L_K(\mathcal{E}_2)$, $v = \sum_j \overline{f_j} \cdot \overline{f_j}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot (v'_\ell b_\ell v'_\ell) \cdot \overline{h_\ell}^*$, co oznacza, że

$$\phi(\sum_i \overline{e_i} \cdot \overline{e_i}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot (v'_\ell a_\ell v'_\ell) \cdot \overline{h_\ell}^*) = (v, 0)$$

i

$$\phi(\sum_j \overline{f_j} \cdot \overline{f_j}^* + \sum_\ell \overline{h_\ell} \cdot (v'_\ell b_\ell v'_\ell) \cdot \overline{h_\ell}^*) = (0, v).$$

Pokazaliśmy, że dla dowolnego $v \in E_3^0$, istnieją a i b, takie że $\phi(a) = (v, 0)$ i $\phi(b) = (0, v)$.

Dla dowolnej krawędzi $e \in E_3^1$ mamy $e = er(e)$, $e^* = r(e)e^*$ i $r(e) \in E_3^0$. Niech $\phi(a) = (r(e), 0)$ i $\phi(b) = (0, r(e))$ dla $a, b \in L_K(E)$. Wtedy $\phi(ea) = (e, e)(r(e), 0) = (e, 0)$, podobnie $\phi(eb) = (0, e)$. Co więcej, $\phi(ae^*) = (e^*, 0)$ i $\phi(be^*) = (0, e^*)$. Wykorzystując Lemat 2.2.1 widzimy, że ϕ jest suriekcją. □

Parę $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ właściwych podgrafów E związaną z nietrywialnym trójpodziałem (E_1^0, E_2^0, E_3^0), którą skonstruowaliśmy na początku powyższego dowodu nazywać będziemy *izo-podziałem* E.

Definicja 3.1.2. Cykl π w grafie E nazywamy *ekstremalnym* jeśli π ma wyjście i dla dowolnego wierzchołka $v \in E^0 \setminus E^0(\pi)$, jeżeli $E^0(\pi) \geqslant v$, to $v \geqslant E^0(\pi)$.

Odwołując się do powyższej definicji widzimy, że w grafie występującym w Przykładzie 2.2.4 każdy cykl jest ekstremalny.

Zauważmy, że jeśli π jest ekstremalnym cyklem, to dla wierzchołka $v \in E^0$, $v \geqslant E^0(\pi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \geqslant H(E^0(\pi))$.

Lemat 3.1.4. *Niech E będzie grafem o skończonej liczbie wierzchołków. Przypuśćmy, że w E istnieje cykl π i wierzchołek v, takie że $v \not\geqslant E^0(\pi)$. Załóżmy dodatkowo, że każdy cykl w E, który posiada wyjście jest cyklem ekstremalnym. Wtedy istnieje nietrywialny trójpodział (E_1^0, E_2^0, E_3^0) zbioru wierzchołków i dla związanego z nim izo-podziału $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ grafu E, w podgrafach $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ każdy cykl, który ma wyjście jest cyklem ekstremalnym. Dodatkowo, π jest cyklem w podgrafie $\mathcal{E}_1$ i dla dowolnego wierzchołka $w \in \mathcal{E}_1^0$, $w \geqslant E^0(\pi)$.*

Dowód. Dla cyklu π rozważmy następujące zbiory:

$$\begin{aligned} B &= \{w \in E^0 :\ w \geqslant H(E^0(\pi)) \text{ i } H(E^0(\pi)) \not\geqslant w\}, \\ E_2^0 &= \{w \in E^0 :\ \text{dla każdego } u \in H(E^0(\pi)), w \not\geqslant u\}, \\ E_3^0 &= \{w \in B : w \geqslant E_2^0\}, \\ E_1^0 &= H(E^0(\pi)) \cup (B \setminus E_3^0). \end{aligned}$$

Zauważmy, że $E_1^0 \neq \emptyset$. Również nie jest trudno stwierdzić, że zbiór E_2^0 jest niepusty. Jeśli $E_3^0 = \emptyset$, to trójpodział $(E_1^0, E_2^0, \emptyset)$ jest nietrywialny i związany z nim izo-podział spełnia wymagane własności (Uwaga 2.2.1(c)). W dalszej części dowodu możemy zatem przyjąć, że E_3^0 nie jest pusty.

Dowody własności (i)-(v) Definicji 3.1.1 wynikają bezpośrednio z przedstawionej konstrukcji zbiorów.

Teraz pokażemy, że zachodzi własność (vi) występująca we wspomnianej definicji. Jeśli w E każdy cykl, który ma wyjście jest cyklem ekstremalnym, to każdy cykl λ w E musi zawierać krawędź e, taką że $r(e) \in E_1^0 \cup E_2^0$. Istotnie, w przeciwnym przypadku $E^0(\lambda) \subseteq E_3^0$.

Z definicji zbiorów B i E_3^0, istnieje $c \in H(E^0(\pi))$, taki że $E^0(\lambda) \geqslant c$, ponieważ $E_3^0 \subseteq B$, mamy $c \not\geqslant E^0(\lambda)$, sprzeczność.

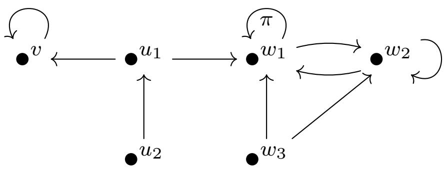
Z drugiej strony, z definicji E_1^0, jeżeli istnieje krawędź e występująca w cyklu λ, taka że $r(e) \in E_1^0$, to $E^0(\lambda) \subseteq E_1^0$. Podobnie, dla cyklów, dla których istnieje krawędź f, taka że $r(f) \in E_2^0$, mamy $E^0(\lambda) \subseteq E_2^0$. Zatem dla każdego cyklu λ w E, albo $E^0(\lambda) \subseteq E_1^0$ albo $E^0(\lambda) \subseteq E_2^0$.

Rozważmy teraz izo-podział $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ grafu E, gdzie $\mathcal{E}_1 = (E_1^0 \cup E_3^0, E_1^1 \cup E_3^1)$, $\mathcal{E}_2 = (E_2^0 \cup E_3^0, E_2^1 \cup E_3^1)$, gdzie dla $i = 1, 2, 3$, $E_i^1 = \{e \in E^1 : \; r(e) \in E_i^0\}$. Ponieważ $E_i^1 \subseteq \mathcal{E}_i^0$ dla $i = 1, 2$, fakt, że w $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ każdy cykl mający wyjście jest cyklem ekstremalnym wynika z powyższych rozważań i definicji E_1^1 i E_2^1. Ostatnia część lematu wynika z konstrukcji $\mathcal{E}_1$. $\square$

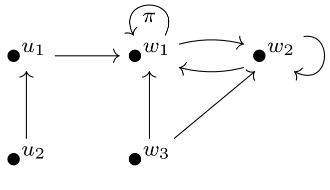
Warto podkreślić, że powyższy dowód zaczynał się od ustalonego cyklu π i dalsza konstrukcja jest z nim związana, dlatego trójpodział (E_1^0, E_2^0, E_3^0) będziemy nazywać π-trójpodziałem E^0 oraz izo-podział $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ z nim związany będziemy nazywać π-izo-podziałem grafu E.

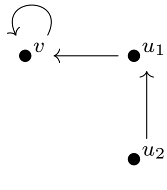
Aby zobrazować powyższą konstrukcję rozważmy następujące przykłady.

Przykład 3.1.2. Rozważmy następujący graf E z wyróżnionym cyklem π.



Stwórzmy π-trójpodział wierzchołków (E_1^0, E_2^0, E_3^0), zgodnie z Lematem 3.1.4. Mamy kolejno, B jest zbiorem wierzchołków, z których istnieje ścieżka do wyróżnionego cyklu, ale nie odwrotnie, czyli $B = \{u_1, u_2\}$. E_2^0 jest zbiorem tych wierzchołków, dla których nie istnieje ścieżka do cyklu, więc $E_2^0 = \{v\}$. Dalej, zbiór E_3^0 jest zbiorem tych wierzchołków z B, z których jest ścieżka do E_2^0, więc w tym przypadku $E_3^0 = B$. Na koniec E_1^0 jest zbiorem składającym się ze wszystkich pozostałych wierzchołków, to jest $E_1^0 = \{w_1, w_2, w_3\}$. W następnym kroku tworzymy π-izo-podział $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ grafu E.

$\mathcal{E}_1 =$ 

$\mathcal{E}_2 =$ 

Ostatecznie dostajemy $L_K(E) \cong L_K(\mathcal{E}_1) \times L_K(\mathcal{E}_2)$.

Przykład 3.1.3. Jak zostało wspomniane wcześniej, trójpodział E^0 nie jest wyznaczony jednoznacznie dla danego grafu. Rozważmy graf z Przykładu 3.1.1 z dwoma wyróżnionymi cyklami τ i λ. Ponawiając konstrukcje z Lematu 3.1.4 dla powyższego grafu oraz cyklu λ mamy λ-trójpodział (E_1^0, E_2^0, E_3^0), gdzie $E_1^0 = \{w_1, w_2, w_3\}$, $E_2^0 = \{v, t_1, t_2, s\}$ i $E_3^0 = \{u_1, u_2\}$.

Z drugiej strony, rozważając τ-trójpodział $(\overline{E}_1^0, \overline{E}_2^0, \overline{E}_3^0)$, otrzymujemy $\overline{E}_1^0 = \{s\}$, $\overline{E}_2^0 = \{v, u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ i $\overline{E}_3^0 = \{t_1, t_2\}$.

Definicja 3.1.3. 1. Graf E nazywamy w pełni skierowanym, jeżeli dla dowolnych wierzchołków $v, w \in E^0$ zachodzi $H(v) \cap H(w) \neq \emptyset$.

2. Podzbiór $X \subseteq E^0$ zbioru wierzchołków nazywamy dziedzicznym, jeżeli $w \in X$ i $w \geqslant v$ implikuje $v \in X$.

3. Podzbiór dziedziczny $X \subseteq E^0$ nazywamy nasyconym, jeżeli dla dowolnego wierzchołka $v \in E^0$, takiego że $s^{-1}(v) \neq \emptyset$, z faktu $\{r(e) : s(e) = v\} \subseteq X$ wynika, że $v \in X$.

Przykład 3.1.4. Rozważmy graf

$$E = \quad \begin{tikzcd} \bullet^{w} \arrow[r, "f"] & \bullet^{v_1} \arrow[r, "e_1"] & \bullet^{v_2} \arrow[d, "e_2"] \\ & & \bullet^{v_3} \arrow[ul, "e_3"'] \end{tikzcd} .$$

W powyższym przykładzie nietrudno zauważyć, że dla każdych wierzchołków $t, u \in E^0$ zachodzi $v_1 \in H(t) \cap H(u)$, więc graf jest w pełni skierowany.

Podzbiór $X = \{v_1, v_2, v_3\}$ jest dziedziczny, ale X nie jest nasycony, ponieważ $w \in s^{-1}(v_1)$, ale $w \notin X$.

Poniżej formułujemy i dowodzimy lemat, który jest dopasowaniem i wykorzystaniem do naszych potrzeb rezultatów przedstawionych w pracy [6].

Lemat 3.1.5. *Niech E będzie grafem skończonego rzędu o skończonym zbiorze wierzchołków E^0 oraz niech K będzie ciałem. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Graf E posiada następujące własności:*

   (a) *graf E jest w pełni skierowany,*

   (b) *każdy cykl w E posiadający wyjście jest cyklem ekstremalnym,* *(c) jeśli graf E posiada cykl, to w E istnieje przynajmniej jeden cykl, który ma wyjście.*

2. *Każdy cykl w E ma wyjście i E^0 jest jedynym niepustym zbiorem dziedzicznym i nasyconym w E^0.*

3. *$L_K(E)$ jest algebrą prostą z jedynką.*

Dowód. *2* $\Leftrightarrow$ *3.* Ponieważ E^0 jest zbiorem skończonym i $L_K(E)$ ma jedynkę, to równoważność zachodzi na podstawie [6, Theorem 3.11].

1 $\Rightarrow$ *2.* Załóżmy nie wprost, że istnieje cykl κ bez wyjścia. Z (c), istnieje inny cykl π, który ma wyjście. Nazwijmy to wyjście f. Zauważmy, że $E^0(\pi) \cap E^0(\kappa) = \emptyset$, ponieważ w przeciwnym przypadku, jeżeli istniałby wierzchołek $v \in E^0(\pi) \cap E^0(\kappa)$, to $s(f) \geqslant v$, i z założenia (b), ponieważ π jest cyklem ekstremalnym, to również $v \geqslant s(f)$, czyli także κ ma wyjście.

Rozważmy zatem wierzchołki $v \in E^0(\kappa)$ i $w \in E^0(\pi)$. Z (a) istnieje wierzchołek u, taki że $v \geqslant u$ i $w \geqslant u$. Ponieważ κ nie ma wyjścia, mamy $u \in E^0(\kappa)$. Ponownie, każdy cykl, który ma wyjście jest cyklem ekstremalnym, więc $v \geqslant u \geqslant E^0(\pi)$ i ponownie otrzymujemy, że κ ma wyjście, sprzeczność.

Załóżmy teraz nie wprost, że istnieje niepusty, dziedziczny, nasycony podzbiór F zbioru wierzchołków E^0, który nie jest całym zbiorem wierzchołków. Niech $v \in F$. Rozważmy dowolny cykl π w grafie E. Pokażemy że $E^0(\pi) \subseteq H(v) \subseteq F$. Weźmy dowolny wierzchołek $u \in E^0(\pi)$. Z (a) istnieje wierzchołek s, taki że $s \in H(v) \cap H(u)$. Z (b) mamy $s \geqslant E^0(\pi)$. A zatem $H(v) \geqslant E^0(\pi)$, więc $E^0(\pi) \subseteq H(v)$.

Zauważmy również, że (a) zapewnia, że graf E jest spójny i nie może zawierać izolowanych wierzchołków. Dodatkowo, dla każdego ujścia $w \in E^0$, $H(w) \cap H(v) \neq \emptyset$, co daje również, że $w \in H(v) \subseteq F$, więc F zawiera wszystkie ujścia i wszystkie cykle w grafie E.

Ponieważ E jest skończony, to z dotychczasowych rozważań można pokazać, że istnieje wierzchołek $w \in E^0 \setminus F$ niebędący ujściem i dla każdej krawędzi e takiej, że $s(e) = w$ mamy $r(e) \in F$. Ponieważ F jest nasycony, to również $w \in F$, co oczywiście daje sprzeczność.

3 $\Rightarrow$ *1.* Ponieważ pokazaliśmy już równoważność *2* $\Leftrightarrow$ *3*, to w E każdy cykl ma wyjście, więc w szczególności spełniony jest warunek (c) oraz korzystając z Twierdzenia 3.1.1, dla ideału będącego całym $L_K(E)$ mamy dla dowolnych dwóch wierzchołków v, u, $H(v) \cap H(u) \neq \emptyset$, więc zachodzi również warunek (a).

Jeśli warunek (b) nie zachodzi, to istnieje cykl π i wierzchołek v, taki że $E^0(\pi) \geqslant v$ i $v \not\geqslant E^0(\pi)$. Niech

$$Q(\pi) = \{u \in E^0 : \; u \geqslant E^0(\pi)\}.$$

Zauważmy, że zbiór $E^0 \setminus Q(\pi)$ jest dziedziczny. Jest on także nasycony, ponieważ dla dowolnego wierzchołka w $Q(\pi)$ istnieje ścieżka do wierzchołka z $E^0(\pi)$. Zbiór ten także nie jest pusty, bo $v \in E^0 \setminus Q(\pi)$. Zatem z *2* (ten punkt jest równoważny *3*) mamy, że $E^0 \setminus Q(\pi) = E^0$, czyli równoważnie $Q(\pi) = \emptyset$, co stanowi sprzeczność. □

Twierdzenie 3.1.6 ([3, Theorem 2.4]). *Niech E będzie grafem i K będzie ciałem. Algebra ścieżek Leavitta $L_K(E)$ jest algebrą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy E jest w pełni skierowany.*

Jako, że pierwszość algebry jest założeniem istotnym w części naszych rozważań, przedstawiony zostanie również dowód tego twierdzenia.

Dowód. "$\Rightarrow$". Załóżmy że algebra $R = L_K(E)$ jest pierwsza. Weźmy dowolne dwa wierzchołki $v, w \in E^0$. Ponieważ ideały RvR i RwR są niezerowe, to również ideał $RvRwR$ jest niezerowy, więc zbiór vRw jest niezerowy. Zatem istnieją ścieżki α, β, takie że $v\alpha\beta^* w \neq 0$, co oznacza, że wierzchołek $u = r(\alpha) = r(\beta)$ jest szukanym wierzchołkiem.

"$\Leftarrow$". Załóżmy, że graf jest w pełni skierowany. Przypomnijmy, że algebra $L_K(E)$ jest zgradowana. Wtedy na mocy [39, Proposition II.1.4] aby pokazać pierwszość wystarczy sprawdzić, że dla dowolnej pary niezerowych, zgradowanych ideałów V, W zachodzi $VW \neq \{0\}$. Z [41, Corollary 3.3 (1)], wiadomo, że każdy niezerowy zgradowany ideał zawiera pewien wierzchołek. Zatem istnieją $v \in V \cap E^0$, $w \in W \cap E^0$. Ponieważ graf jest w pełni skierowany, to $v \geqslant u$ i $w \geqslant u$ dla pewnego wierzchołka u, to oznacza, że $u \in V$ i $u \in W$. Zatem $u = u^2$ jest niezerowym elementem VW, co kończy dowód. □

Kolejny lemat będzie przydatny w dalszych rozważaniach.

Lemat 3.1.7. *Niech E będzie grafem skończonego rzędu o skończonym zbiorze E^0 oraz niech K będzie ciałem. Załóżmy, że istnieje cykl π w E, taki że dla każdego $v \in E^0$, $v \geqslant E^0(\pi)$. Załóżmy dodatkowo, że w E każdy cykl z wyjściem jest cyklem ekstremalnym. Wtedy $L_K(E)$ posiada Własność (A).*

Dowód. Jeśli π ma wyjście, to z Lematu 3.1.5 możemy stwierdzić, że $L_K(E)$ jest algebrą prostą z jedynką, więc $L_K(E)$ posiada Własność (A). Jeśli natomiast π nie ma wyjścia, to pokażemy najpierw, że π jest jedynym cyklem w grafie. Istotnie, załóżmy nie wprost, że istnieje w E inny cykl π'. Jako, że to są różne cykle, to również istnieje krawędź e w π' niewystępująca w π. Jeśli $s(e) \in E^0(\pi)$, to mamy sprzeczność, bo π nie ma wyjścia. Natomiast jeśli $s(e) \in E^0 \setminus E^0(\pi)$, to z założenia $s(e) \geqslant E^0(\pi)$. Zatem dla dowolnego wierzchołka $w \in E^0(\pi)$, $E^0(\pi') \geqslant w$, a więc π' ma wyjście. Ponieważ każdy cykl z wyjściem jest cyklem ekstremalnym również mamy $w \geqslant E^0(\pi')$, więc w szczególności π ma wyjście, sprzeczność.

Weźmy $v \in E^0 \setminus E^0(\pi)$, wtedy zachodzi $v \geqslant E^0(\pi)$ i $E^0(\pi) \not\geqslant v$. Zatem z [5, Theorem 3.3] mamy $L_K(E) \cong \mathbb{M}_d(K[x, x^{-1}]$ dla pewnego d. Następnie korzystając z [29, Proposition 1.3] i [29, Theorem 2.2], mamy, że w tym przypadku również $L_K(E)$ posiada Własność (A). □

Zbierając wszystkie otrzymane do tej pory informacje jesteśmy w stanie udowodnić główne wyniki tego rozdziału. Pierwszy odpowiada przypadkowi gdy zbiór wierzchołków jest skończony, natomiast drugi gdy nieskończony.

Twierdzenie 3.1.8. *Niech K będzie ciałem. Niech E będzie grafem skończonego rzędu i E^0 będzie zbiorem skończonym. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$L_K(E)$ posiada Własność (A).*

2. *$L_K(E)$ posiada lewostronną Własność (A).*

3. *$L_K(E)$ posiada prawostronną Własność (A).*

4. *W grafie E każdy cykl który ma wyjście jest cyklem ekstremalnym.*

Dowód. Implikacje *1* $\Rightarrow$ *4*, *2* $\Rightarrow$ *4*, *3* $\Rightarrow$ *4* wynikają z Lematu 3.1.2.

Do dokończenia dowodu wystarczy pokazać implikację *4* $\Rightarrow$ *1*. Powołując się na paragraf poprzedzający bezpośrednio Lemat 3.1.2, możemy ograniczyć się do przypadku w którym w grafie E jest przynajmniej jeden cykl π.

Jeśli dla dowolnego wierzchołka $v \in E^0$, $v \geqslant E^0(\pi)$, to z Lematu 3.1.7 otrzymujemy tezę.

Załóżmy zatem, że $v \not\geqslant E^0(\pi)$ dla pewnego wierzchołka $v \in E^0$. Ze Stwierdzenia 3.1.3 oraz z Lematu 3.1.4 wynika, że istnieje nietrywialny π-trójpodział (E^0_1, E^0_2, E^0_3) zbioru E^0 i odpowiadający mu π-izo-podział $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, taki że $L_K(E) \cong L_K(\mathcal{E}_1) \times L_K(\mathcal{E}_2)$. Z

Lematu 3.1.7 algebra $L_K(\mathcal{E}_1)$ ma Własność (A). Ponadto graf $\mathcal{E}_2$ jest skończonego rzędu i każdy cykl w $\mathcal{E}_2$, który ma wyjście, jest cyklem ekstremalnym. Zatem możemy powtórzyć powyższe rozumowanie zastępując graf E grafem $\mathcal{E}_2$. Ponieważ graf E był skończony, po skończonej liczbie kroków otrzymamy ciąg grafów $F_1 = \mathcal{E}_1, F_2, \ldots, F_n$ dla pewnego $n \geqslant 1$, taki że $L_K(E) \cong L_K(F_1) \times \ldots \times L_K(F_n)$ i dla dowolnego i algebra $L_K(F_i)$ ma Własność (A). Zatem z [29, Proposition 1.3] $L_K(E)$ również posiada Własność (A). □

Odwołując się do przykładu 2.2.4, wspomnieliśmy, że w grafie E każdy cykl jest cyklem ekstremalnym, zatem dla grafu E algebra $L_K(E)$ spełnia Własność (A).

Twierdzenie 3.1.9. *Niech K będzie ciałem. Niech E będzie grafem skończonego rzędu, takim że E^0 jest zbiorem nieskończonym. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$L_K(E)$ posiada Własność (A).*
2. *$L_K(E)$ posiada lewostronną Własność (A).*
3. *$L_K(E)$ posiada prawostronną Własność (A).*
4. *Dla każdego skończonego zbioru $F \subseteq E^0$, istnieje wierzchołek v_F, taki że $H(F) \cap H(v_F) = \emptyset$.*

Dowód. Pokażemy równoważność *3* $\Leftrightarrow$ *4*. Jeśli E^0 jest nieskończonym zbiorem, to dowolny element $L_K(E)$ jest dzielnikiem zera. Zatem $L_K(E)$ posiada prawostronną Własność (A) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończenie generowany ideał V algebry $L_K(E)$ ma niezerowy anihilator.

Przypuśćmy, że *4* zachodzi i niech $a_1, \ldots, a_n$ będą dowolnymi elementami $L_K(E)$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Przypuśćmy, że wszystkie a_j są jednomianami. Łatwo zauważyć, że zbiór wszystkich wierzchołków u, dla których $a_i u \neq 0$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$ jest skończony. Oznaczmy ten zbiór przez F. Weźmy $j \in \{1, \ldots, n\}$ i rozważmy dowolne dwie ścieżki α, β. Pokażemy, że $(a_j \alpha \beta^*) v_F = 0$. Załóżmy przeciwnie, że $a_j \alpha \neq 0$, więc w szczególności $a_j w \neq 0$, gdzie $w = s(\alpha)$. Więc $w \in F$. Ponieważ $v_F = s(\beta)$ i $r(\alpha) = r(\beta)$, możemy wywnioskować, że $r(\alpha) \in H(w) \cap H(v_F)$, co przeczy *4*. Zatem v_F anihiluje ideał generowany przez $a_1, \ldots, a_n$. Ponieważ dowolny skończenie generowany ideał $L_K(E)$ jest zawarty w ideale generowanym przez skończoną liczbę jednomianów, z powyższych rozważań otrzymujemy, że $L_K(E)$ posiada prawostronną Własność (A).

Aby pokazać przeciwną implikację, załóżmy, że dla dowolnego skończonego zbioru F, takiego że dla dowolnego wierzchołka v zachodzi $H(F) \cap H(v) \neq \emptyset$. Wtedy z Twierdzenia 3.1.1, prawostronny anihilator ideału V algebry $L_K(E)$, który jest generowany przez F, jest zerowy. Zatem powołując się na uwagę z pierwszego akapitu dowodu, widzimy, że $L_K(E)$ nie posiada Własności (A).

Równoważność *2* $\Leftrightarrow$ *4* można pokazać analogicznie, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Przykład 3.1.5.

$$E = \bullet^{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet^{v_2} \xleftarrow{e_2} \bullet^{v_3} \xrightarrow{e_3} \bullet^{v_4} \xleftarrow{e_4} \bullet^{v_5} \xrightarrow{e_5} \ldots \tag{3.2}$$

W powyższym grafie spełniony jest warunek 4. Twierdzenia 3.1.9. Zatem algebra $L_K(E)$ posiada Własność (A).

Na zakończenie tego rozdziału przedstawimy przykład algebry, która jest Bézout i nie posiada Własności (A).

Przykład 3.1.6. Rozważmy dowolne ciało K, graf E

$$E = \begin{tikzcd} \bullet^{v} \arrow[loop above, "e"] \arrow[r, "f"] & \bullet^{u} \end{tikzcd}$$

i algebrę ścieżek Leavitta $L_K(E)$. Ponieważ E ma cykl e z wyjściem, który nie jest ekstremalny, to $L_K(E)$ nie posiada ani lewo-, ani prawostronnej Własności (A), natomiast powołując się na [4], algebra $L_K(E)$ jest Bézout.

Rozdział 4

Konstrukcja klasy maksymalnych przemiennych podalgebr dla pierwszych algebr ścieżek Leavitta

Na podstawie pracy [13].

4.1 Teoretyczne podstawy zagadnienia

W tym rozdziale skonstruujemy pewne klasy przemiennych podalgebr algebry ścieżek Leavitta $L_R(E)$. Dodatkowo przedstawimy dowód maksymalności tak zwanego jądra przemiennego $\mathcal{M}_R(E)$ dla $L_R(E)$, gdzie E jest ustalonym grafem i R jest pierścieniem przemiennym z jedynką. Wspomniany dowód jest innym od znanego w literaturze.

W literaturze można znaleźć wiele prac dotyczących maksymalnych podalgebr (niekoniecznie łącznych) algebr (zob. [20], [18], [23], [33], [38]).

Klasyczny wynik, mówi że dla każdego ciała K, wymiar nad K maksymalnej przemiennej podalgebry algebry macierzy $\mathbb{M}_n(K)$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$, gdzie $\lfloor \ \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby. Jest wiele dowodów tego twierdzienia. Na szczególną uwagę zasługują dowody przedstawione przez Mirzakhani w [37] i Gustafsona w [26]).

Powołując się na pracę [49] podamy przykład maksymalnej przemiennej podalgebry $\mathbb{M}_n(K)$ o wymiarze $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$ dla $n \geqslant 2$. Niech k_1 i k_2 będą dodatnimi liczbami całkowitymi, takimi że $k_1 + k_2 = n$. Definiujemy prostokąt B,

$$B = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leqslant i \leqslant k_1 < j \leqslant n\},$$

i rozważamy podzbiór

$$\mathbb{J} = \left\{ \sum_{(i,j)\in B} b_{ij}E(i,j) : b_{ij} \in K \text{ dla każdego } (i,j) \in B \right\}, \tag{4.1}$$

gdzie $E(i,j)$ oznacza macierz, która ma dokładnie jedną jedynkę (w i-tym wierszu i j-tej kolumnie) a w pozostałych miejscach są zera.

Z definicji $\mathbb{J}$ składa się z macierzy górnotrójkątnych odpowiadających prostokątowi B, które są postaci

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1(k_1+1)} & \cdots & b_{1n} \\
0 & \ddots & \cdots & 0 & b_{2(k_1+1)} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & & & 0 & b_{k_1(k_1+1)} & \cdots & b_{k_1 n} \\
\vdots & & & & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}.$$

Można zauważyć, że podalgebra

$$\mathcal{A} = KI_n + \mathbb{J} \tag{4.2}$$

algebry $\mathbb{M}_n(K)$, gdzie $KI_n := \{aI_n : a \in K\}$ oraz I_n oznacza macierz identycznościową, jest przemienną podalgebrą algebry $\mathbb{M}_n(K)$. Biorąc $k_1 = k_2 = \frac{n}{2}$, gdy n jest parzyste oraz $k_1 = \frac{n-1}{2}$ i $k_2 = \frac{n+1}{2}$, gdy n jest nieparzyste, otrzymujemy przemienną podalgebrę o wymiarze równym $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$.

W pracy [8] Amitsur i Levitzki pokazali, że dla dowolnego pierścienia przemiennego R algebra macierzy $\mathbb{M}_n(R)$ spełnia standardową tożsamość wielomianową stopnia $2n$, a nie spełnia żadnej tożsamości wielomianowej niższego rzędu. Wprowadzenie do teorii algebr spełniających tożsamości wielomianowe można znaleźć w rozdziale 6 książki [17]. Podany jest tam inny dowód wspomnianego twierdzenia Amitsura i Levitzkiego.

Nawet w przypadku ciała K pewne podalgebry $\mathbb{M}_n(K)$, spełniają dodatkowe tożsamości wielomianowe, które nie są spełnione przez całą algebrę $\mathbb{M}_n(K)$. Ten problem był analizowany w pracach [49] i [51]. Autorzy rozpatrywali w nich podalgebry algebry $\mathbb{M}_n(K)$ spełniające tożsamości wielomianowe, które uogólniają podalgebry przemienne.

Wymiar podalgebry algebry macierzy $\mathbb{M}_n(K)$ nie może być dowolny. Ograniczeniem górnym wymiaru dowolnej właściwej podalgebry z jedynką algebry $\mathbb{M}_n(K)$, gdzie K jest ciałem charakterystyki zero jest $n^2 - n + 1$ (zob. [7]). Opisanie wszystkich liczb mniejszych od n^2, które mogą być wymiarem pewnej podalgebry algebry macierzy $\mathbb{M}_n(K)$ jest trudne. Przykład podany na początku rozdziału jest podalgebrą wymiaru $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$.

W pracy [18] Canto i Nasr-Isfahani skonstruowali pewną maksymalną, ze względu na inkluzję, podalgebrę przemienną algebry ścieżek Leavitta $L_R(E)$ nad dowolnym przemiennym pierścieniem z jedynką R. Podalgebra ta jest nazywana jądrem przemiennym $L_R(E)$ i oznaczana jest przez $\mathcal{M}_R(E)$ (zob. [18, Proposition 4.5] i [18, Theorem 4.13]).

Naturalne jest pytanie, czym jest $\mathcal{M}_K(E)$ dla konkretnych grafów i ciała K. Zaczniemy od analizy grafu $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \qquad \bullet^{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet^{v_2} \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet^{v_n}\ , \tag{4.3}$$

dla którego algebra ścieżek $L_K(\mathcal{E})$ jest izomorficzna z algebrą macierzy (zob. Przykład 2.2.2). Jądrem przemiennym $\mathcal{M}_K(\mathcal{E})$ tego grafu jest podalgebra $L_K(\mathcal{E})$ generowana przez wszystkie wierzchołki grafu $v_1, \ldots, v_n$. W izomorfizmie algebr $L_K(\mathcal{E})$ i $\mathbb{M}_K(E)$ odpowiada ona podalgebrze macierzy generowanej przez macierze $E(1,1), E(2,2), \ldots, E(n,n)$. Zatem jądro przemienne $\mathcal{M}_K(\mathcal{E})$ jest izomorficzne z produktem ciał.

Jeśli dla pewnego $k_1 < n$ rozważymy podalgebrę $\mathcal{A}$ algebry $\mathbb{M}_n(K)$ zdefiniowaną w równości (4.2), to jej izomorficzna kopia $\mathcal{C}$ w $L_K(\mathcal{E})$ jest generowana przez wszystkie ścieżki $\alpha \in L_K(\mathcal{E})$, takie że $s(\alpha) \in \{v_1, \ldots, v_{k_1}\}$ i $r(\alpha) \in \{v_{k_1+1}, \ldots, v_n\}$. W ten sposób znaleźliśmy przemienną podalgebrę $L_K(\mathcal{E})$, która nie jest izomorficzna z $\mathcal{M}_K(\mathcal{E})$.

Celem tego rozdziału będzie uogólnienie powyższej konstrukcji, dzięki której znajdziemy klasę maksymalnych przemiennych podalgebr pierwszych algebr ścieżek Leavitta. Zastosowanie konstrukcji z pewnymi parametrami w grafie $\mathcal{E}$ prowadzi do podalgebry $L_K(\mathcal{E})$, która jest izomorficzna z podalgebrą $\mathcal{A} = KI_n + \mathbb{J}$.

Na zakończenie rozdziału przedstawimy istotnie różny od oryginalnego, zamieszczonego w pracy [18], dowód maksymalności jądra przemiennego $\mathcal{M}_R(E)$. W dowodzie wykorzystamy jedynie informacje dotyczące struktury $L_R(E)$.

4.2 Sformułowanie głównego wyniku i podstawowe informacje

Dla wierzchołków $u, v \in E^0$ rozważmy następujący zbiór niezerowych jednomianów:

$$\mathfrak{M}(u,v) = \{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in \mathrm{Path}(E),\ \alpha\beta^* \neq 0,\ s(\alpha) = u,\ r(\beta^*) = v\}. \tag{4.4}$$

Niech ścieżki $\alpha, \beta \in \mathrm{Path}(E)$ będą, takie że $\alpha^*\beta \neq 0$. Jeśli $|\alpha| \geqslant |\beta|$), to istnieje ścieżka α', taka że $\alpha = \beta\alpha'$. Natomiast gdy $|\alpha| < |\beta|$), to istnieje ścieżka β', taka że $\beta = \alpha\beta'$. Wtedy z warunku (CK1) w pierwszym przypadku $\alpha^*\beta = (\alpha')^*$, a w drugim $\alpha^*\beta = \beta'$. Takie przedstawienie jednomianu $\alpha^*\beta$ nazwiemy *redukcją*.

Definicja 4.2.1. Niech $E = (E^0, E^1, s, r)$ będzie grafem, takim że $|E^0| > 1$ i niech (E^0_s, E^0_r) będzie parą niepustych podzbiorów E^0, taką że $E^0_s \cap E^0_r = \emptyset$ i $E^0_s \cup E^0_r = E^0$, wtedy będziemy mówić, że mamy podział zbioru E^0. Przez $L_K(E^0_s, E^0_r)$ będziemy oznaczać podalgebrę $L_K(E)$ generowaną przez wszystkie jednomiany $\alpha\beta^*$, takie że $\alpha, \beta \in \mathrm{Path}(E)$, $s(\alpha) \in E^0_s$ i $r(\beta^*) \in E^0_r$.

Przykład 4.2.1. Rozważmy graf

$$E = \begin{tikzcd} \bullet^{u} \arrow[r, "f"] & \bullet^{v_1} \arrow[r, "e_1"] & \bullet^{v_2} \arrow[d, "e_2"] & \\ & & \bullet^{v_3} \arrow[ul, "e_3"'] \arrow[r, "g"] & \bullet^{w} \end{tikzcd} .$$

Niech $E^0_s = \{u, v_1, w\}$ i $E^0_r = \{v_2, v_3\}$. Dla takiego podziału przykładowymi elementami podalgebry $L_K(E^0_s, E^0_r)$ są jenomiany fe_1, $fe_1e_2e_3e_1$, e_3^*, $e_1e_2e_3e_1e_2gg^*$

Zauważmy, że jeśli $|E^0| = 1$ i $E^1 = \emptyset$, to $L_K(E)$ jest izomorficzna z K. Jeśli $|E^0| = 1$ i $|E^1| = 1$, to $L_K(E)$ jest przemienną algebrą, zatem bezcelowe jest rozważanie maksymalnej podalgebry przemiennej $L_K(E)$ w tym przypadku. Gdy $|E^0| = 1$ i $|E^1| > 1$, to algebra $L_K(E)$ jest prosta, więc w szczególności także pierwsza. Niestety przedstawionej w Definicji 4.2.1 konstrukcji nie można w tym przypadku zrealizować.

Ze względu na powyższe uwagi, na potrzeby tego rozdziału zakładamy, że $|E^0| > 1$.

Nietrudno zauważyć, że dla dowolnego podziału (E^0_s, E^0_r) zbioru wierzchołków E^0, iloczyn dwóch elementów podalgebry $L_K(E^0_s, E^0_r)$ algebry $L_K(E)$ jest równy 0. Zatem dowolne dwa elementy są przemienne. Podobnie jest w przypadku macierzy należących do bloku $\mathbb{J}$ w Przykładzie 4.1.

Dla pierwszych algebr ścieżek Leavitta rozważać będziemy pewne ich podalgebry, skojarzone z $L_K(E^0_s, E^0_r)$. Udowodnimy, że są one maksymalnymi (ze względu na inkluzję) przemiennymi podalgebrami algebry $L_K(E)$.

Przypomnijmy, że $L_K(E)$ jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy E jest w pełni skierowany (zob. Twierdzenie 3.1.6).

Głównym celem tego rozdziału jest udowodnienie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.2.1. *Niech E będzie grafem, gdzie $|E^0| > 1$ i niech K będzie ciałem. Załóżmy, że $L_K(E)$ jest algebrą pierwszą. Niech (E^0_s, E^0_r) będzie podziałem zbioru E^0.*

1. *Jeśli E ma skończenie wiele wierzchołków i ponadto*
   (a) *E jest acykliczny, lub*
   (b) *E ma co najmniej dwa cykle, lub*
   (c) *E ma dokładnie jeden cykl i ten cykl ma wyjście*

   to algebra
   $$K \cdot 1 + L_K(E^0_s, E^0_r)$$
   jest maksymalną przemienną podalgebrą $L_K(E)$.

2. *Jeśli E ma skończenie wiele wierzchołków, dokładnie jeden cykl i cykl ten nie ma wyjść, to algebra*
   $$Z(L_K(E)) + L_K(E^0_s, E^0_r)$$
   jest maksymalną przemienną podalgebrą $L_K(E)$.

3. *Jeśli E ma nieskończenie wiele wierzchołków, to algebra*
   $$L_K(E^0_s, E^0_r)$$
   jest maksymalną przemienną podalgebrą $L_K(E)$.

Zaczniemy od pokazania następującego lematu.

Lemat 4.2.2. *Niech K będzie ciałem, niech E będzie grafem i niech σ będzie nietrywialną, zamkniętą, ścieżką prostą opartą na v. Załóżmy, że dla ścieżek $\alpha, \beta \in \mathrm{Path}(E)$, w algebrze $L_K(E)$ zachodzi*
$$(\sigma^*)^n(\alpha\beta^*)\sigma^n \neq 0$$
dla każdego $n \geqslant 0$. Wtedy:

1. *Jeśli $|\alpha| > |\beta|$, to istnieją dodatnie liczby m, t, takie że*
   $$(\sigma^*)^n(\alpha\beta^*)\sigma^n = \sigma^t,$$
   dla każdego $n \geqslant m$ i $|\sigma^t| = |\alpha| - |\beta|$.

2. Jeśli $|\alpha| < |\beta|$, to istnieją dodatnie liczby m, t, takie że

$$(\sigma^*)^n(\alpha\beta^*)\sigma^n = (\sigma^*)^t,$$

dla każdego $n \geqslant m$ i $|(\sigma^*)^t| = |\beta| - |\alpha|$.

3. Jeśli $|\alpha| = |\beta|$, to istnieje dodatnia liczba m, taka że

$$(\sigma^*)^n(\alpha\beta^*)\sigma^n = v,$$

dla każdego $n \geqslant m$.

Dowód. 1. Niech m będzie możliwie najmniejszą liczbą, taką że $|\sigma^m| > |\alpha|$. Oznaczmy przez δ ścieżkę odpowiadającą $(\sigma^*)^m(\alpha\beta^*)\sigma^m$ po dokonaniu redukcji. Oczywiście δ nie jest wierzchołkiem. Dodatkowo $s(\delta) = r(\delta) = v$. Ponieważ $(\sigma^*)^{n-m}\delta \neq 0$ dla każdego $n \geqslant m$, to $\delta = \sigma^t$ dla pewnego $t > 0$. Zatem

$$(\sigma^*)^n(\alpha\beta^*)\sigma^n = (\sigma^*)^{n-m}\delta\sigma^{n-m} = (\sigma^*)^{n-m}\sigma^t\sigma^{n-m} = \sigma^t.$$

2. Tę część można udowodnić analogicznie do poprzedniego przypadku.
3. Rozważmy element $\alpha\beta^*\sigma$. Po dokonaniu redukcji spełnia on warunki pierwszego przypadku. Zatem istnieje taka dodatnia liczba m, że

$$(\sigma^*)^n(\alpha\beta^*\sigma)\sigma^n = \sigma$$

dla każdego $n \geqslant m$. Mnożąc ostatnią równość obustronnie z lewej strony przez σ^* mamy

$$(\sigma^*)^{n+1}(\alpha\beta^*)\sigma^{n+1} = v.$$

□

Uwaga 4.2.1. Do końca rozdziału, jeśli rozważamy element $\mathfrak{a} \in L_K(E)$, to równocześnie ustalamy jego prezentację $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\beta_j^*$, gdzie J jest skończonym zbiorem indeksów, $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Path}(E)$ oraz $k_j \in K$ dla każdego $j \in J$. Będziemy zakładać, że liczba elementów J w prezentacji jest możliwie najmniejsza. Dodatkowo zakładamy, że $e_n f_1^* \neq s(e_n)$ dla jednomianu

$$\alpha_j\beta_j^* = e_1e_2\ldots e_n f_1^* f_2^* \ldots f_m^*$$

pojawiającego się w rozważanej prezentacji elementu $\mathfrak{a}$, gdzie $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m \in E^1$ i $n, m \geqslant 1$.

W takim przypadku powiemy, że $\mathfrak{a}$ jest w postaci zredukowanej (lub $\mathfrak{a}$ jest zredukowany). Zauważmy, że dla dowolnego podzbioru $I \subseteq J$ element $\sum_{j \in I} k_j \alpha_j \beta_j^*$ również jest zredukowany, w szczególności $v\mathfrak{a}w, v\mathfrak{a}, \mathfrak{a}w \in L_K(E)$ są w postaci zredukowanej dla dowolnych $v, w \in E^0$.

Lemat 4.2.3. *Niech E będzie grafem i niech K będzie ciałem. Jeśli $\mathfrak{a}$ jest niezerowym, jednorodnym elementem w $L_K(E)$ o zredukowanej postaci*

$$\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{n} k_j \alpha_j \alpha_j^*$$

dla pewnych ścieżek α_j, gdzie $|\alpha_j| > 0$ i niezerowych $k_j \in K$, $j = 1, \ldots, n$, to istnieje ścieżka γ, taka że $r(\gamma^*) = s(\alpha_i)$ dla pewnego i oraz

$$\gamma^* \alpha_j = 0 = \alpha_j^* \gamma \tag{4.5}$$

dla każdego j.

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na n. Jeśli $n = 1$, to istnieje $k \in K$ i $\alpha \in \mathrm{Path}(E)$, takie że $\mathfrak{a} = k\alpha\alpha^*$. Niech $\alpha = e_1 \ldots e_\ell$ dla pewnych krawędzi $e_1, \ldots, e_\ell$ i pewnej liczby naturalnej ℓ, więc $\mathfrak{a} = ke_1 \ldots e_\ell e_\ell^* \ldots e_1^*$ jest w postaci zredukowanej, czyli istnieje krawędź $f \neq e_\ell$, taka że $s(f) = s(e_\ell)$. W przeciwnym przypadku z (CK2) $e_\ell e_\ell^* = s(e_\ell)$, co przeczy założeniu, że $\mathfrak{a}$ jest w zredukowanej postaci. Weźmy ścieżkę $\gamma = e_1 \ldots e_{\ell-1} f$. Tak wybrana ścieżka γ spełnia tezę Lematu.

Rozważmy przypadek $n > 1$. Niech i będzie dodatnią liczbą całkowitą, taką że α_i ma najmniejszą długość spośród wszystkich α_j, dla $j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz niech $\alpha_i = e_1 \ldots e_\ell$ dla pewnych krawędzi $e_1, \ldots, e_\ell$ i pewnego $\ell > 1$. Z założenia, że $\mathfrak{a}$ jest w postaci zredukowanej, istnieje krawędź f, taka że $f \neq e_\ell$, $s(f) = s(e_\ell)$ i dla $\delta = e_1 \ldots e_{\ell-1} f$ zachodzi

$$\delta\delta^* \neq \alpha_j \alpha_j^* \tag{4.6}$$

dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $\delta^* \alpha_i = 0 = \alpha_i^* \delta$.

Jeśli $\delta^* \alpha_j = 0$ dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$, to przyjmując $\gamma = \delta$, spełnia tezę Lematu. Załóżmy przeciwnie, że $\delta^* \alpha_j \neq 0$ dla pewnego j. Bez utraty ogólności, możemy przyjąć, że istnieje liczba całkowita $s \geqslant 1$, taka że dla każdego $j \in \{1, \ldots, s\}$, $\delta^* \alpha_j = 0$ i dla każdego $j \in \{s + 1, \ldots, n\}, \delta^* \alpha_j \neq 0$. Zatem dla każdego $j \geqslant s + 1$ istnieje ścieżka α', dla której $\alpha_j = \delta \alpha_j'$. Korzystając z (4.6) mamy $|\alpha_j'| > 0$.

Ponieważ $\mathfrak{a}$ jest w postaci zredukowanej i $\mathfrak{a} = \sum_{j\leqslant s} k_j\alpha_j\alpha_j^* + \delta\delta^*\mathfrak{a}\delta\delta^*$, to $\delta^*\mathfrak{a}\delta \neq 0$. Zauważmy, że $\delta^*\mathfrak{a}\delta$ ma zredukowaną prezentację następującej postaci $\sum_{j=s+1}^{n} k_j\alpha'_j\alpha'^*_j$. Ponadto, $s(\alpha'_{s+1}) = s(\alpha'_{s+2}) = \ldots = s(\alpha'_n) = r(\delta)$. Zatem z założenia indukcyjnego, istnieje ścieżka σ, taka że $r(\sigma^*) = s(\alpha'_{s+1}) = s(\delta^*)$ i $\sigma^*\alpha'_j = 0 = \alpha'_j\sigma$ dla każdego $j \in \{s+1, \ldots, n\}$.

Teraz rozważmy niezerowy element $\gamma = \delta\sigma$. Ponieważ $r(\gamma^*) = s(e_1) = s(\alpha_i)$ i $\gamma^*\alpha_j = 0 = \alpha_j^*\gamma$ dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$, to kończy dowód. □

Definicja 4.2.2. Dla danego grafu E i ciała K, niech $\mathfrak{a}$ będzie jednorodnym elementem $L_K(E)$, który jest w ustalonej zredukowanej postaci $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\beta_j^*$, gdzie $k_j \in K$ jest niezerowym elementem dla każdego $j \in J$. Wtedy dla każdego $n \geqslant 0$, definiujemy zbiór

$$M_n(\mathfrak{a}) := \{\alpha_j\beta_j^* \in \mathrm{supp}(\mathfrak{a}) : |\alpha_j| = n\}.$$

Następny wynik jest związany z twierdzeniem o redukcji (zob. [42] i [40]).

Stwierdzenie 4.2.4. *Niech E będzie grafem oraz niech K będzie ciałem. Rozważmy niezerowy element $\mathfrak{a} \in L_K(E)$ w ustalonej zredukowanej postaci $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\beta_j^*$, gdzie $k_j \in K$ jest niezerowym elementem dla każdego $j \in J$. Załóżmy, że n_0 jest najmniejszą liczbą całkowitą, taką że $M_{n_0}(\mathfrak{a})$ jest niepustym podzbiorem* $\mathrm{supp}(\mathfrak{a})$. *Wtedy dla każdego $i \in J$, takiego że $\alpha_i\beta_i^* \in M_{n_0}(\mathfrak{a})$ istnieją ścieżki γ i $\overline{\gamma}$ spełniające*

$$\gamma^*\Big(\bigcup_{n\geqslant n_0} M_n(\mathfrak{a})\Big)\overline{\gamma} = \gamma^*\{\alpha_i\beta_i^*\}\overline{\gamma} = \{s(\gamma^*)\} = \{r(\overline{\gamma})\}.$$

Dodatkowo, $\gamma = \alpha_i\sigma$ i $\overline{\gamma} = \beta_i\sigma$ dla pewnej ścieżki $\sigma \in \mathrm{Path}(E)$.

Dowód. Rozważmy wszystkie liczby nieujemne $n_0, n_1, \ldots, n_t$ gdzie $n_0 < n_1 < \ldots < n_t$, spełniające $M_{n_\ell}(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$, dla $\ell = 0, 1, \ldots, t$. Wtedy $\mathrm{supp}(\mathfrak{a}) = \bigcup_{\ell=0}^{t} M_{n_\ell}(\mathfrak{a})$.

Ustalmy $i \in J$, takie że $\alpha_i\beta_i^* \in M_{n_0}(\mathfrak{a})$. Przyjmijmy $\gamma_0 = \alpha_i$ i $\overline{\gamma}_0 = \beta_i$. Mamy

$$\gamma_0^* M_{n_0}(\mathfrak{a})\overline{\gamma}_0 = \gamma_0^*\{\alpha_i\beta_i^*\}\overline{\gamma}_0 = \{s(\gamma_0^*)\} = \{r(\overline{\gamma}_0)\}.$$

Zauważmy, że jeśli $\gamma_0^* M_{n_\ell}(\mathfrak{a})\overline{\gamma}_0 = \{0\}$ dla każdego $\ell > 0$, to biorąc $\gamma = \gamma_0$, $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_0$ i $\sigma = r(\alpha_i) = r(\beta_i)$ kończymy dowód.

W przeciwnym przypadku istnieje takie $n_{\ell_1} > n_0$, że

$$\gamma_0^* M_{n_{\ell_1}}(\mathfrak{a})\overline{\gamma}_0 \neq \{0\}.$$

Możemy założyć, że n_{ℓ_1} jest najmniejszą liczbą mającą powyższą własność. Ustalmy element $j_1 \in J$, taki że $\alpha_{j_1}\beta_{j_1}^* \in M_{n_{\ell_1}}(\mathfrak{a})$ i $\gamma_0^*\alpha_{j_1}\beta_{j_1}^*\overline{\gamma}_0 \neq 0$. Wtedy

$$\alpha_{j_1}\beta_{j_1}^* = \alpha_i\mu_1 e_1 f_1^*\omega_1^*\beta_i^*$$

dla pewnych ścieżek μ_1 i ω_1 i krawędzi e_1 i f_1. Dodatkowo $|\alpha_i\mu_1 e_1| = n_{\ell_1}$ i $|\mu_1 e_1| = |f_1^*\omega_1^*|$. Korzystając z μ_1 (możliwe, że jest to wierzchołek) w powyższej prezentacji $\alpha_{j_1}\beta_{j_1}^*$, definiujemy zbiór

$$N_1 = \{\alpha_j\beta_j^* \in M_{n_{\ell_1}}(\mathfrak{a}) : \mu_1^*\alpha_i^*\alpha_j\beta_j^*\beta_i\mu_1 \neq 0\}.$$

Zauważmy, że istnieje krawędź h_1, dla której

$$\alpha_i\mu_1 h_1 h_1^*\mu_1^*\beta_i^* \notin N_1 \quad \text{oraz} \quad \alpha_i\mu_1 h_1 h_1^*\mu_1^*\beta_i^* \neq 0.$$

Istotnie, jeśli $N_1 = \emptyset$, to możemy wziąć $h_1 = e_1$. Załóżmy, że $N_1 \neq \emptyset$. Dla każdego $\alpha_j\beta_j^* \in N_1$, mamy wtedy

$$\alpha_j\beta_j^* = \alpha_i\mu_1 e_2 f_2^*\mu_1^*\beta_i^*$$

dla pewnych krawędzi e_2 i f_2. Z relacji definiujące $L_K(E)$ i założenia, że element $\mathfrak{a}$ jest w zredukowanej postaci, istnieje krawędź h_1, taka że

$$\alpha_i\mu_1 h_1 h_1^*\mu_1^*\beta_i^* \notin N_1 \quad \text{oraz} \quad \alpha_i\mu_1 h_1 h_1^*\mu_1^*\beta_i^* \neq 0,$$

co chcieliśmy pokazać.

Niech $\gamma_1 = \alpha_1\mu_1 h_1$ oraz $\overline{\gamma}_1 = \beta_i\mu_1 h_1$. Wtedy

$$\gamma_1^*(M_{n_0}(\mathfrak{a}) \cup M_{n_1}(\mathfrak{a}) \cup \ldots \cup M_{n_{\ell_1}}(\mathfrak{a}))\overline{\gamma}_1 = \gamma_1^*\{\alpha_i\beta_i^*\}\overline{\gamma}_1 = \{s(\gamma_1^*)\} = \{r(\overline{\gamma}_1)\}.$$

Powtarzamy teraz kroki wykonywane w wcześniejszej części dowodu. Jeśli $\gamma_1^* M_{n_\ell}(\mathfrak{a})\overline{\gamma}_1 = 0$ dla każdego $\ell > \ell_1$, to biorąc $\gamma = \gamma_1$, $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_1$ i $\sigma = \mu_1 h_1$ kończymy dowód.

W przeciwnym przypadku, rozważmy najmniejszą liczbę n_{ℓ_2}, taką że $n_{\ell_2} > n_{\ell_1}$ i $\gamma_1^* M_{n_{\ell_2}}(\mathfrak{a})\overline{\gamma}_1 \neq 0$. W taki sam sposób jak skonstruowaliśmy $\gamma_1, \overline{\gamma}_1, \mu_1, h_1$ konstruujemy $\gamma_2, \overline{\gamma}_2, \mu_2, h_2$, takie że

$$\gamma_2^*(M_{n_0}(\mathfrak{a}) \cup M_{n_1}(\mathfrak{a}) \cup \ldots \cup M_{n_{\ell_2}}(\mathfrak{a}))\overline{\gamma}_2 = \gamma_2^*\{\alpha_i\beta_i^*\}\overline{\gamma}_2 = \{s(\gamma_2^*)\} = \{r(\overline{\gamma}_2)\}.$$

Jeśli $\gamma_2^* M_{n_\ell}(\mathfrak{a})\overline{\gamma}_2 = 0$ dla każdego $\ell > \ell_2$, to biorąc $\gamma = \gamma_2$, $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_2$ i $\sigma = \mu_2 h_2$ kończymy dowód. W przeciwnym razie kontynuujemy ten proces. Skończy się on po skończonej liczbie kroków, co kończy dowód. □

Z definicji zbiorów $M_n(\mathfrak{a})$ mamy następujący wniosek.

Wniosek 4.2.5. *Dla E, K i $\mathfrak{a}$, takich jak w Stwierdzeniu 4.2.4, istnieją ścieżki γ i $\overline{\gamma}$, takie że $\gamma^*\mathfrak{a}\overline{\gamma} = ks(\gamma^*) = kr(\overline{\gamma})$ dla pewnego niezerowego $k \in K$.*

Lemat 4.2.6. *Jeśli K jest ciałem, E jest w pełni skierowanym grafem i $u, v \in E^0$, to $\mathfrak{M}(u,v) \neq \emptyset$.*

Dowód. Skoro graf jest w pełni skierowany, to istnieje wierzchołek w, taki że $u \geqslant w$ i $v \geqslant w$. Niech α będzie ścieżką, taką że $s(\alpha) = u$ i $r(\alpha) = w$ i niech β będzie ścieżką, taką że $s(\beta) = v$ i $r(\beta) = w$. Wówczas dostajemy niezerowy element $\alpha\beta^*$ należący do $\mathfrak{M}(u,v)$. $\square$

Ze Stwierdzenia 4.2.4 oraz powyższego Lematu, dostajemy następujący wniosek:

Wniosek 4.2.7. *Niech K będzie ciałem i niech E będzie grafem w pełni skierowanym oraz niech $\mathfrak{a} \in L_K(E)$ w ustalonej zredukowanej postaci $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\beta_j^*$, gdzie $k_j \in K$ jest niezerowym elementem dla każdego $j \in J$. Jeśli $v \in E^0$ jest, taki że $\mathfrak{a}v \neq 0$ (odpowiednio $v\mathfrak{a} \neq 0$), to dla dowolnego wierzchołka $w \in E^0$ istnieje jednomian $\alpha\beta^* \in \mathfrak{M}(v,w)$ (odpowiednio, $\alpha\beta^* \in \mathfrak{M}(w,v)$), taki że $\mathfrak{a}\alpha\beta^* \neq 0$ (odpowiednio, $\alpha\beta^*\mathfrak{a} \neq 0$).*

Dowód. Niech γ i $\overline{\gamma}$ będą takie, jak we Wniosku 4.2.5, ale dla elementu $\mathfrak{a}v$. Wtedy, dla $u = s(\gamma^*) = r(\overline{\gamma})$, mamy $\gamma^*\mathfrak{a}v\overline{\gamma} = u$. Z Lematu 4.2.6 dla każdego $w \in E^0$ istnieje niezerowy jednomian $\sigma\delta^* \in \mathfrak{M}(u,w)$. Wtedy $\gamma^*\mathfrak{a}v\overline{\gamma}\sigma\delta^* \neq 0$, więc $\mathfrak{a}v\overline{\gamma}\sigma\delta^* \neq 0$. Biorąc $\alpha = \overline{\gamma}\sigma$ i $\beta = \delta$, dostajemy tezę.

W podobny sposób można pokazać tezę w przypadku elementu $v\mathfrak{a}$. $\square$

4.2.1 O elementach przemiennych z $L_K(E_s^0, E_r^0)$

Jest jasnym, że dla każdego $\mathfrak{a} \in L_K(E)$

$$\mathfrak{a} = \sum_{u,v\in E^0} u\mathfrak{a}v. \tag{4.7}$$

Motywuje to następującą definicję.

Element $\mathfrak{a} \in L_K(E)$ nazywać będziemy *diagonalnym*, jeśli

$$\mathfrak{a} = \sum_{v\in E^0} v\mathfrak{a}v.$$

W tym podrozdziale pokażemy, że nasze rozważania będziemy mogli zawęzić do elementów diagonalnych algebry $L_K(E)$.

Lemat 4.2.8. *Niech E będzie grafem w pełni skierowanym, niech K będzie ciałem i niech $\mathfrak{a}$ będzie jednorodnym elementem w $L_K(E)$ w ustalonej zredukowanej postaci $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\beta_j^*$, gdzie $k_j \in K$ jest niezerowym elementem dla każdego $j \in J$. Jeśli $\mathfrak{a}$ jest przemienny ze wszystkimi elementami $L_K(E_s^0, E_r^0)$, to*

1. $u\mathfrak{a}v = 0$ *dla każdego* $u \in E^0$ *i każdego* $v \in E^0_s$*, takich że* $u \neq v$*,*

2. $u\mathfrak{a}v = 0$ *dla każdych* $u, v \in E^0_r$*, takich że* $u \neq v$*.*

Dowód. 1. Załóżmy, że istnieją takie wierzchołki $u \in E^0$ i $v \in E^0_s$, $u \neq v$, że $u\mathfrak{a}v \neq 0$. Z (4.4) oraz Wniosku 4.2.7, dla dowolnego wierzchołka $w \in E^0_r$ istnieje niezerowy jednomian $\alpha\beta^* \in \mathfrak{M}(v, w)$, taki że $u\mathfrak{a}\alpha\beta^* \neq 0$. Zauważmy, że $\alpha\beta^* \in L_K(E^0_s, E^0_r)$. Ponieważ $uv = 0$, to $u\mathfrak{a}\alpha\beta^* = u\alpha\beta^*\mathfrak{a} = 0$, sprzeczność.

2. Załóżmy nie wprost, że istnieją różne wierzchołki $u, v \in E^0_r$, takie że $u\mathfrak{a}v \neq 0$. Weźmy dowolny wierzchołek $w \in E^0_s$. Ponownie korzystając z Wniosku 4.2.7, istnieje jednomian $\alpha\beta^* \in \mathfrak{M}(w, u)$, taki że $\alpha\beta^*\mathfrak{a}v \neq 0$. Tak jak w pierwszym przypadku, wnioskujemy, że $\alpha\beta^*\mathfrak{a}v = \mathfrak{a}\alpha\beta^*v = 0$ i otrzymujemy sprzeczność. □

Wniosek 4.2.9. *Niech* E *będzie w pełni skierowanym grafem, niech* K *będzie ciałem i* $\mathfrak{a}$ *będzie jednorodnym elementem w* $L_K(E)$*, w ustalonej zredukowanej postaci i niech* $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\beta_j^*$*, gdzie* $k_j \in K$ *jest niezerowym elementem dla każdego* $j \in J$*. Jeśli* $\mathfrak{a}$ *jest przemienny ze wszystkimi elementami* $L_K(E^0_s, E^0_r)$ *i* $u\mathfrak{a}v = 0$ *dla każdego* $u \in E^0_s$ *i dla każdego* $v \in E^0_r$*, to* $\mathfrak{a}$ *jest diagonalny.*

Dowód. Odwołując się do równania (4.7), otrzymujemy

$$\mathfrak{a} = \sum_{u,v\in E^0_s} u\mathfrak{a}v + \sum_{u\in E^0_s,\ v\in E^0_r} u\mathfrak{a}v + \sum_{u\in E^0_r,\ v\in E^0_s} u\mathfrak{a}v + \sum_{u,v\in E^0_r} u\mathfrak{a}v.$$

Z Lematu 4.2.8 drugi i trzeci składnik jest równy 0. Ponadto ponownie z tego samego Lematu w pozostałych dwóch sumach niezerowymi elementami są tylko te, dla których $u = v$. Zatem $\mathfrak{a}$ jest diagonalny. □

Mamy następujący wniosek, z którego będziemy często korzystać (możliwe, że bez wcześniejszego wspominania o tym).

Wniosek 4.2.10. *Niech* E *będzie grafem w pełni skierowanym, niech* K *będzie ciałem i niech* $\mathfrak{a}$ *będzie jednorodnym elementem w* $L_K(E)$ *w ustalonej zredukowanej postaci* $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\beta_j^*$*, gdzie* $k_j \in K$ *jest niezerowym elementem dla każdego* $j \in J$*, oraz niech* $\mathfrak{a}$ *będzie przemienny ze wszystkimi elementami* $L_K(E^0_s, E^0_r)$*. Wówczas zachodzi*

$$v\mathfrak{a}v\alpha\beta^* = \mathfrak{a}\alpha\beta^* = \alpha\beta^*\mathfrak{a} = \alpha\beta^*w\ \mathfrak{a}w, \tag{4.8}$$

dla każdych $v \in E^0_s$*,* $w \in E^0_r$ *i* $\alpha\beta^* \in \mathfrak{M}(v, w)$*, gdzie* $\alpha, \beta \in \mathrm{Path}(E)$*.*

Lemat 4.2.11. *Niech E będzie w pełni skierowanym grafem, niech K będzie ciałem i niech $\mathfrak{a}$ będzie jednorodnym elementem w $L_K(E)$, w ustalonej zredukowanej postaci $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\beta_j^*$, gdzie $k_j \in K$ jest niezerowym elementem dla każdego $j \in J$. Niech $\mathfrak{a}$ będzie ponadto elementem diagonalnym. Jeśli $\mathfrak{a} \neq 0$, to $v\mathfrak{a}v \neq 0$ dla każdego $v \in E^0$.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathfrak{a} \neq 0$ i $v\mathfrak{a}v = 0$ dla każdego $v \in E^0_r$. Z Wniosku 4.2.9, $\mathfrak{a}$ jest diagonalny, więc istnieje wierzchołek $u \in E^0_s$, taki że $u\mathfrak{a}u \neq 0$. Zatem $u\mathfrak{a} \neq 0$. Niech $v \in E^0_r$. Z Wniosku 4.2.7 istnieje niezerowy jednomian $\alpha\beta^* \in \mathfrak{M}(u, v)$, taki że $u\mathfrak{a}\alpha\beta^* \neq 0$, więc także $\mathfrak{a}\alpha\beta^* \neq 0$. Ponieważ $\alpha\beta^* \in L_K(E^0_s, E^0_r)$, mamy $\alpha\beta^*\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\alpha\beta^*$. Skoro $r(\beta^*) = v$ i $v \in E^0_r$, otrzymujemy $\alpha\beta^*\mathfrak{a} = 0$, sprzeczność. Zatem istnieje wierzchołek $v \in E^0_r$, taki że $v\mathfrak{a}v \neq 0$.

Załóżmy teraz, że $u\mathfrak{a}u = 0$ dla pewnego $u \in E^0_s$. Ponownie korzystając z Wniosku 4.2.7, dla dowolnego niezerowego jednomianu $\alpha\beta^* \in \mathfrak{M}(u, v)$, takiego że $\alpha\beta^*\mathfrak{a}v \neq 0$, otrzymujemy, że $\alpha\beta^*\mathfrak{a}v = \mathfrak{a}\alpha\beta^* = 0$, sprzeczność. Zatem $u\mathfrak{a}u \neq 0$ dla każdego $u \in E^0_s$.

Powtarzając to rozumowanie dla dowolnego wierzchołka $v \in E^0_r$ dostajemy, że również $v\mathfrak{a}v \neq 0$. □

Uzyskane do tej pory wyniki pozwalają nam udowodnić trzecią część Twierdzenia 4.2.1.

Dowód Twierdzenia 4.2.1 punkt 3. Niech E będzie grafem, takim że zbiór wierzchołków E^0 jest nieskończony. Załóżmy nie wprost, że $\mathfrak{a}$ jest przemienny ze wszystkimi elementami $L_K(E^0_s, E^0_r)$ i $\mathfrak{a} \notin L_K(E^0_s, E^0_r)$ (w szczególności $\mathfrak{a} \neq 0$). Możemy przyjąć, że $u\mathfrak{a}w = 0$ dla każdej pary $u \in E^0_s$, $w \in E^0_r$. Z Lematu 4.2.11 wynika, że $v\mathfrak{a}v \neq 0$ dla każdego $v \in E^0$. W takim razie zbiór E^0 jest skończony, sprzeczność. □

4.2.2 O elementach przemiennych z $L_K(E^0_s, E^0_r)$ w przypadku skończonej liczby wierzchołków

Przypomnijmy, że w tym rozdziale $|E^0| > 1$. Dodatkowo w tym podrozdziale przyjmujemy, że $|E^0| < \infty$. Zacznijmy od następujących spostrzeżeń.

Uwaga 4.2.2.

(a) Niech K będzie ciałem i E będzie grafem, takim że algebra $L_K(E)$ jest algebrą pierwszą. Do udowodnienia pozostałych dwóch podpunktów Twierdzenia 4.2.1, wystarczy pokazać, że dla niezerowego, jednorodnego elementu $\mathfrak{a} \in L_K(E)$ spełniającego warunki

(P1) $u\mathfrak{a}v = 0$ dla każdego $u \in E^0_s$ i każdego $v \in E^0_r$ oraz

(P2) $\mathfrak{a}g = g\mathfrak{a}$ dla każdego $g \in L_K((E^0_s, E^0_r))$,

zachodzi

(I) $\mathfrak{a} \in K \cdot 1$, gdy E jest grafem o skończonej liczbie wierzchołków, spełniającym jedną z następujących własności:

(i) E jest acykliczny, lub

(ii) E ma co najmniej dwa cykle, lub

(iii) E ma dokładnie jeden cykl, i cykl ten ma wyjście.

(II) $\mathfrak{a} \in Z(L_K(E))$, jeśli E jest grafem o skończonej liczbie wierzchołków, który ma dokładnie jeden cykl i cykl ten nie ma wyjścia.

(b) Rozważmy zredukowaną reprezentację elementu $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = \sum_{j \in J} k_j \alpha_j \beta_j^*. \tag{4.9}$$

Możemy przyjąć następujące założenie: Jeśli $\mathfrak{b}$ jest elementem $L_K(E)$ spełniającym (P1) i (P2), mającym zredukowaną prezentację $\sum_{t \in T} \sigma_t \delta_t^*$ dla pewnych ścieżek σ_t, δ_t, i $|T| < |J|$ (gdzie J jest taki jak w Uwadze 4.2.1), wtedy

$$\mathfrak{b} \in \begin{cases} K, & \text{jeśli } E \text{ jest taki jak w (I).} \\ Z(L_K(E)), & \text{jeśli } E \text{ jest taki jak w (II).} \end{cases}$$

Od tego momentu, poprzez kolejne podrozdziały, przyjmujemy, że

$$\mathfrak{a} = \sum_{j \in J} k_j \alpha_j \beta_j^* \tag{4.10}$$

jest w postaci zredukowanej i $\mathfrak{a}$ spełnia założenia przedstawione w Uwadze 4.2.2.

Lemat 4.2.12. *Jeśli E jest grafem, $|E^0| < \infty$ i element $\mathfrak{a}$ jest stopnia zero, to dla każdego $v \in E^0$*

$$v\mathfrak{a}v = \sum_{j \in I} k_j \alpha_j \alpha_j^*$$

dla pewnego $I \subseteq J$.

Dowód. Zauważmy, że $v\mathfrak{a}v = \sum_{j\in I} k_j\alpha_j\beta_j^*$ dla pewnego zbioru indeksów $I \subseteq J$. Ponieważ $\mathfrak{a}$ jest stopnia zero, to $|\alpha_j| = |\beta_j|$ dla każdego $j \in I$. Dla tak wyznaczonej zredukowanej prezentacji $v\mathfrak{a}v$, rozważmy zbiory $M_{n_\ell}(v\mathfrak{a}v)$, $\ell = 0, 1, \ldots, m$ (zob. Definicja 4.2.2), gdzie $n_0 < n_1 < \ldots < n_m$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, takimi że $M_{n_\ell}(v\mathfrak{a}v) \neq \emptyset$, $\ell = 0, 1, \ldots, m$.

Załóżmy nie wprost, że istnieje q, $0 \leqslant q \leqslant m$, takie że $\alpha_i\beta_i^* \in M_{n_q}(v\mathfrak{a}v)$ dla pewnego $i \in I$ oraz $\alpha_i \neq \beta_i$. Niech q będzie najmniejszym elementem zbioru $\{0, 1, \ldots, m\}$ posiadającym tę własność. Wtedy, dla $\ell < q$ zachodzi $\beta_j = \alpha_j$, więc każdy jednomian $\alpha_j\beta_j^* \in M_{n_\ell}(v\mathfrak{a}v)$.

Dla każdego ℓ, niech

$$(v\mathfrak{a}v)_\ell := \sum_{\alpha_j\beta_j^* \in M_{n_\ell}(v\mathfrak{a}v)} k_j\alpha_j\beta_j^*.$$

Wtedy

$$v\mathfrak{a}v = \sum_{\ell\geqslant 0}(v\mathfrak{a}v)_\ell.$$

Korzystając z Uwagi 4.2.1 i Stwierdzenia 4.2.4, znajdziemy takie ścieżki γ i $\overline{\gamma}$, że

$$\gamma^*\left(\sum_{\ell\geqslant 0}(v\mathfrak{a}v)_\ell\right)\overline{\gamma} = k_i\gamma^*(\alpha_i\beta_i^*)\overline{\gamma} \neq 0, \tag{4.11}$$

gdzie $|\gamma| \geqslant |\alpha_i|$ i $|\overline{\gamma}| \geqslant |\beta_i|$. Ze Stwierdzenia 4.2.4 oraz założenia, że $\mathfrak{a}$ ma zerowy stopień wynika, że $\gamma = \alpha_i\sigma$ i $\overline{\gamma} = \beta_i\sigma$ dla pewnej ścieżki σ. Zatem γ i $\overline{\gamma}$ mają tę samą długość, ale $\gamma \neq \overline{\gamma}$. To daje równość

$$\gamma^*(\alpha_j\alpha_j^*)\overline{\gamma} = 0$$

dla każdego $\alpha_j\alpha_j^* \in M_{n_\ell}(v\mathfrak{a}v)$, gdzie $\ell < q$. W związku z tym

$$\gamma^*\mathfrak{a}\overline{\gamma} = \gamma^*(\sum_{u\in E^0} u\mathfrak{a}u)\overline{\gamma} = \gamma^*(v\mathfrak{a}v)\overline{\gamma}$$

$$= \gamma^*(\sum_{\ell\geqslant 0}(v\mathfrak{a}v)_\ell)\overline{\gamma} = \gamma^*(\sum_{\ell\geqslant q}(v\mathfrak{a}v)_\ell)\overline{\gamma} = k_i\gamma^*(\alpha_i\beta_i^*)\overline{\gamma} \neq 0$$

oraz

$$k_i\gamma^*(\alpha_i\beta_i^*)\overline{\gamma} = k_i s(\gamma^*) = k_i r(\overline{\gamma}).$$

Jeśli $v \in E_s^0$, to ustalmy wierzchołek $w \in E_r^0$ oraz rozważmy dowolny niezerowy jednomian $\tau\delta^* \in \mathfrak{M}(r(\overline{\gamma}), w)$. Wtedy $\gamma^* v\mathfrak{a}v\overline{\gamma}\tau\delta^* \neq 0$. Z drugiej strony, skoro $v\overline{\gamma}\tau\delta^* \in L_K(E_s^0, E_r^0)$ oraz $\gamma \neq \overline{\gamma}$ i $|\gamma| = |\overline{\gamma}|$, to

$$\gamma^* v\mathfrak{a}v\overline{\gamma}\tau\delta^* = \gamma^*\overline{\gamma}\tau\delta^*\mathfrak{a} = 0,$$

co daje sprzeczność.

Jeśli $v \in E^0_r$, to używając podobnych argumentów również dochodzimy do sprzeczności.

$\square$

Lemat 4.2.13. *Niech E będzie grafem, takim że $|E^0| < \infty$. Jeśli istnieje wierzchołek $v \in E^0$, taki że $v\mathfrak{a}v = kv$ dla pewnego niezerowego $k \in K$, to dla dowolnego wierzchołka $w \in E^0$, $\alpha_i = w = \beta_i^*$ dla pewnego $i \in J$ (zob. (4.10)).*

Dowód. Ponieważ $v\mathfrak{a}v = kv$, to $\mathfrak{a}$ jest stopnia zero. W takim razie, z Lematu 4.2.12, $\mathfrak{a}$ jest postaci $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\alpha_j^*$. Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnego wierzchołka $w \in E^0$, $w = \alpha_i$ dla pewnego $i \in J$.

Załóżmy najpierw, że $v \in E^0_s$. Ustalmy $x \in E^0_r$ i załóżmy, że $x \neq \alpha_j$ dla każdego $j \in J$. Z Lematu 4.2.3 i Lematu 4.2.12 istnieje ścieżka widmowa γ^*, taka że $r(\gamma^*) = x$ oraz $\gamma^* x\mathfrak{a}x = 0$. Niech $\alpha\beta^* \in \mathfrak{M}(v, s(\gamma^*))$. Wtedy $\alpha\beta^*\gamma^*$ jest niezerowym elementem $L_K(E^0_s, E^0_r)$ i zachodzi

$$0 = \alpha\beta^*\gamma^* x\mathfrak{a}x = v\mathfrak{a}v\alpha\beta^*\gamma^* = kv\alpha\beta^*\gamma^* \neq 0,$$

sprzeczność. Zatem, udowodniliśmy, że dla dowolnego $x \in E^0_r$, $x = \alpha_i$ dla pewnego $i \in J$.

Rozważmy teraz $u \in E^0_s$ i $x \in E^0_r$. Pamiętając, że $\mathfrak{a} = \sum_{j\in J} k_j\alpha_j\alpha_j^*$ mamy $x\mathfrak{a}x = k_x x + \sum_{j\in I} k_j\alpha_j\alpha_j^*$ dla pewnego zbioru $I \subseteq J$, gdzie $|\alpha_j| > 0$ (gdy $I \neq \emptyset$) i $0 \neq k_x \in K$. Zauważmy, że istnieje ścieżka widmowa γ^*, taka że $r(\gamma^*) = x$ oraz $\gamma^* x\mathfrak{a}x = k_x\gamma^*$. Istotnie, jeśli $I = \emptyset$, to bierzemy $\gamma^* = x$, w przeciwnym przypadku bierzemy γ^*, takie że $\gamma^*(\sum_{j\in I} k_j\alpha_j\alpha_j^*) = 0$ i $r(\gamma^*) = x$ (zob. Lemat 4.2.3).

Jeśli $u \neq \alpha_j$ dla każdego $j \in J$, to istnieje ścieżka δ, taka że $s(\delta) = u$ i $u\mathfrak{a}u\delta = 0$. Niech $\alpha\beta^*$ będzie niezerowym jednomianem w $\mathfrak{M}(r(\delta), s(\gamma^*))$. Wtedy $u\delta\alpha\beta^*\gamma^*$ jest niezerowym elementem $L_K(E^0_s, E^0_r)$ oraz

$$0 = u\mathfrak{a}u\delta\alpha\beta^*\gamma^* = u\delta\alpha\beta^*\gamma x\mathfrak{a}x = k_x u\delta\alpha\beta^*\gamma \neq 0,$$

sprzeczność. W takim razie dla każdego $u \in E^0_s$, $u = \alpha_i$ dla pewnego $i \in J$.

Z powyższych rozważań wynika, że jeśli $v \in E^0_s$, to dla każdego $w \in E^0$, $w = \alpha_i$ dla pewnego $i \in J$.

Załóżmy teraz, że $v \in E^0_r$. Używając podobnych argumentów jak w poprzednim przypadku, możemy pokazać, że dla każdego $w \in E^0$, $w = \alpha_i$ dla pewnego $i \in J$. $\square$

4.2.3 Ostatnie kroki dowodu Twierdzenia 4.2.1 (1)

Dowód następującego lematu jest natychmiastowy.

Lemat 4.2.14. *Niech E będzie grafem i niech K będzie ciałem. Jeśli dla wierzchołków $u, v \in E^0$ i $x \in L_K(E)$ iloczyn $uxv \neq 0$, to $\alpha x \beta^* \neq 0$, dla dowolnych ścieżek α i β, takich że $r(\alpha) = u$ i $s(\beta^*) = v$.*

Przypomnijmy że $\mathfrak{a}$ jest postaci jak w Uwadze 4.2.2. To znaczy zredukowaną reprezentacją elementu $\mathfrak{a}$ jest następująca:

$$\mathfrak{a} = \sum_{j \in J} k_j \alpha_j \beta_j^*. \tag{4.12}$$

Lemat 4.2.15. *Niech E będzie w pełni skierowanym grafem o skończenie wielu wierzchołkach i niech K będzie ciałem. Jeśli:*

1. *E jest acykliczny, lub*
2. *E ma co najmniej dwa cykle, lub*
3. *E ma dokładnie jeden cykl i cykl ma wyjście,*

to $v\mathfrak{a}v = kv$ dla pewnego $k \in K$ i pewnego wierzchołka $v \in E^0$.

Dowód. Jeśli graf E jest taki jak w *1* lub w *3*, to istnieje wierzchołek $v \in E^0$, który jest ujściem. Wtedy $v\mathfrak{a}v = kv$ dla pewnego elementu $k \in K$, który z Lematu 4.2.11 jest niezerowy.

Następnie, niech E będzie taki jak w *2*. Ponieważ E jest w pełni skierowany, to istnieje cykl π oparty na wierzchołku w, który ma wyjście e oraz $s(e) = w$. Niech $x = r(e)$.

Załóżmy, że istnieją wierzchołki $u \in E_s^0$ i $v \in E_r^0$, takie że $u \geqslant w$ i $x \geqslant v$. To znaczy, że istnieją ścieżki $\sigma_1 \in \mathfrak{M}(u, w)$ i $\sigma_2 \in \mathfrak{M}(x, v)$. Wtedy dla każdej liczby dodatniej ℓ element $\tau_\ell = \sigma_1 \pi^\ell e \sigma_2 \neq 0$ i $s(\tau_\ell) = u$, $r(\tau_\ell) = v$. Zauważmy, że $\tau_\ell \in L_K(E_s^0, E_r^0)$ dla każdego ℓ. Zatem dla każdego ℓ zachodzi $\mathfrak{a}\tau_\ell = \tau_\ell\mathfrak{a}$. Mnożąc obie strony tego równania przez τ_ℓ^*, otrzymujemy $\tau_\ell^* \mathfrak{a} \tau_\ell = v\mathfrak{a}v \neq 0$, co daje

$$\sigma_2^* e^* (\pi^\ell)^* \sigma_1^* \mathfrak{a} \sigma_1 \pi^\ell e \sigma_2 \neq 0.$$

Jeśli stopień $\mathfrak{a}$ jest niezerowy, to z Lematu 4.2.2 istnieją liczby dodatnie m i t i niezerowy element $k \in K$, takie że dla każdego $\ell < m$, $(\pi^\ell)^* \sigma_1^* \mathfrak{a} \sigma_1 \pi^\ell$ jest równy albo $k\pi^t$, albo $k(\pi^*)^t$.

Ponieważ e jest wyjściem z cyklu π, to bez względu na przypadek mamy $e^*(\pi^\ell)^*\sigma_1^*\mathfrak{a}\sigma_1\pi^\ell e = 0$, sprzeczność.

W związku z powyższym możemy przyjąć, że $\mathfrak{a}$ ma stopień zero. Z Lematu 4.2.2(3) istnieje dodatnia liczba m, taka że dla każdego $\ell \geqslant m$,

$$v\mathfrak{a}v = \tau_\ell^*\mathfrak{a}\tau_\ell = \sigma_2^*e^*(\pi^\ell)^*\sigma_1^*\mathfrak{a}\sigma_1\pi^\ell e\sigma_2 = kv,$$

dla pewnego niezerowego $k \in K$.

Analogiczne rozumowanie możemy powtórzyć w przypadku dualnym, gdy istnieją wierzchołki $u \in E_r^0$, $v \in E_s^0$, takie że $u \geqslant w$ oraz $x \geqslant v$ (w tym przypadku $(\tau_\ell)^* \in L_K(E_s^0, E_r^0)$ dla każdego ℓ).

Przypuśćmy teraz, że dla dowolnych $u, v' \in E^0$, takich że $u \geqslant w$ i $x \geqslant v'$, zachodzi $u, v' \in E_s^0$. Zauważmy, że wtedy $w \in E_s^0$. Ustalmy $z \in E_r^0$. Ponieważ E jest w pełni skierowany, to możemy znaleźć wierzchołek $v \in E^0$ oraz ścieżki $\delta \in \mathfrak{M}(x, v)$ i $\gamma \in \mathfrak{M}(z, v)$. Z przyjętych założeń wynika, że $v \in E_s^0$. Zatem, dla dowolnej liczby dodatniej ℓ, zarówno $\pi^\ell e\delta\gamma^*$, jak i γ^* są elementami $L_K(E_s^0, E_r^0)$ i oba te elementy nie są zerowe. W takim razie, korzystając z Lematu 4.2.14 dostajemy

$$\mathfrak{a}\pi^\ell e\delta\gamma^* = \pi^\ell e\delta\gamma^*\mathfrak{a} = \pi^\ell e\delta\mathfrak{a}\gamma^* \neq 0.$$

Zatem $\mathfrak{a}\pi^\ell e\delta = \pi^\ell e\delta\mathfrak{a}$. Mnożąc ostatnią równość obustronnie z lewej strony przez $\delta^*e^*(\pi^\ell)^*$, otrzymujemy $\delta^*e^*(\pi^\ell)^*\mathfrak{a}\pi^\ell e\delta = v\mathfrak{a}v \neq 0$.

Jeśli $\mathfrak{a}$ nie jest stopnia zero, to używając takich samych argumentów jak w pierwszej części dowodu, ponownie otrzymujemy sprzeczność. W przeciwnym przypadku, jeśli założymy, że stopień $\mathfrak{a}$ jest równy zero, dostajemy $v\mathfrak{a}v = kv$ dla pewnego niezerowego elementu $k \in K$. Podobne rozumowanie dowodzi tezy, jeśli założymy, że dla każdych $u, v' \in E^0$, takich że $u \geqslant w$ i $x \geqslant v'$, mamy $u, v' \in E_r^0$. $\square$

Dowód Twierdzenia 4.2.1 (1). Zauważmy, że przyjęta postać elementu $\mathfrak{a}$ (por. 4.9) oraz Lemat 4.2.12 i Lemat 4.2.15, pozwalają zapisać $\mathfrak{a} = \sum_{j \in J} k_j\alpha_j\alpha_j^*$. Dodatkowo, korzystając z Lematu 4.2.13 dla każdego $w \in E^0$, istnieje $i \in J$, takie że $w = \alpha_i$. W takim razie:

$$\mathfrak{a} = \sum_{w \in E^0} k_w w + \sum_{j \in J'} k_j\alpha_j\alpha_j^*$$

dla pewnych niezerowych elementów $k_w, k_j \in K$ oraz $J' \subseteq J$, takiego że $|\alpha_j| > 0$ dla każdego $j \in J'$. Zauważmy, że $|J| = |J'| + |E^0|$.

Ustalmy wierzchołek $v \in E^0$. Wtedy

$$\sum_{w\in E^0} k_w w = \sum_{w\in E_0} kw + \sum_{w\in E^0\setminus\{v\}} k'_w w = k + \sum_{w\in E^0\setminus\{v\}} k'_w w,$$

gdzie $k = k_v$, $k'_w = k_w - k_v \in K$ dla $w \neq v$. Rozważmy $\mathfrak{b} = \sum_{w\in E^0\setminus\{v\}} k'_w w + \sum_{j\in J'} k_j \alpha_j \alpha_j^*$. Ponieważ $\mathfrak{a} = k + \mathfrak{b}$, to ustalając zredukowaną prezentację elementu $\mathfrak{b}$ i korzystając z Uwagi 4.2.2, wnioskujemy $\mathfrak{b} \in K$. Stąd również $\mathfrak{a} \in K$, co należało wykazać. □

4.2.4 Pozostały przypadek

Do dowodu Twierdzenia 4.2.1 został przypadek, gdy E jest grafem w pełni skierowanym o skończonej liczbie wierzchołków, który ma dokładnie jeden cykl i ten cykl nie ma wyjścia. Dla ustalenia uwagi na czas dowodu oznaczmy ten cykl przez π.

Dowód Twierdzenia 4.2.1 (2). Załóżmy najpierw, że E nie jest skończonego rzędu i rozważmy element $\mathfrak{a}$ o zredukowanej prezentacji, takiej jak w (4.9). Niech w będzie wierzchołkiem, takim że zbiór $s^{-1}(w)$ jest nieskończony oraz niech $e \in s^{-1}(w)$ będzie krawędzią, taką że ani e, ani e^* nie pojawia się w jednomianie należącym do nośnika $\mathfrak{a}$. Niech $z = r(e)$.

Ustalmy wierzchołek $v \in E^0(\pi)$. Z Lematu 4.2.6 dla każdego wierzchołka u istnieje ścieżka o początku w u i końcu w v $\alpha_{uv} \in \mathfrak{M}(u, v)$. Podobnie przez α_{zv} będziemy oznaczać ścieżkę o początku w z i końcu w v.

Załóżmy, że $v, w \in E^0_s$ i rozważmy dowolny $u \in E^0_r$. Jednomiany α^*_{uv} i $e\alpha_{zv}\alpha^*_{uv}$ należą do $L_K(E^0_s, E^0_r)$. Ponieważ $v\mathfrak{a}v = \alpha^*_{zv}e^*e\alpha_{zv}\mathfrak{a}\alpha^*_{uv}\alpha_{uv}$, to korzystając Lematu 4.2.11 dostajemy

$$\mathfrak{a}e\alpha_{zv}\alpha^*_{uv} = e\alpha_{zv}\alpha^*_{uv}\mathfrak{a} = e\alpha_{zv}\mathfrak{a}\alpha^*_{uv} \neq 0. \tag{4.13}$$

Mnożąc pierwszy i trzeci jednomian w równaniu (4.13) z prawej strony przez α_{uv} otrzymujemy

$$\mathfrak{a}e\alpha_{zv} = e\alpha_{zv}\mathfrak{a}.$$

Ponownie korzystając z Lematu 4.2.11, mamy

$$\alpha^*_{zv}e^*\mathfrak{a}e\alpha_{zv} = v\mathfrak{a}v \neq 0. \tag{4.14}$$

Zauważmy, że $e^*\alpha_j\beta^*_j e = 0$ dla każdego $j \in J$, takiego że $|\alpha_j| + |\beta_j| > 0$. W takim razie $v = \alpha_i = \beta^*_i$ dla pewnego $i \in J$. Zatem z równości (4.14) mamy $v\mathfrak{a}v = k_v v$ dla pewnego niezerowego $k_v \in K$.

Powtarzając rozumowanie z dowodu Twierdzenia 4.2.1 (1) wnioskujemy, że $\mathfrak{a} \in K \subseteq Z(L_K(E))$.

Powtarzając rozumowanie dla

- $v \in E_r^0$ i $w \in E_s^0$,
- $v, w \in E_r^0$,
- $v \in E_s^0$ i $w \in E_r^0$,

otrzymujemy że w tych przypadkach również $\mathfrak{a} \in K \subseteq Z(L_K(E))$.

Załóżmy teraz, że E jest grafem skończonego rzędu. W tym przypadku będziemy wzorować się na dowodzie zamieszczonym w [5, Theorem 3.3].

Ustalmy wierzchołek $v \in E^0(\pi)$. Ponieważ E jest w pełni skierowany i π nie ma wyjścia, to dla każdego $u \in E^0$ zachodzi $u \geqslant v$. Z założenia zbiór wszystkich ścieżek, kończących się na v, które nie zawierają cyklu π jest skończony. Oznaczmy ten zbiór przez P,

$$P = \{p_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Zatem zbiór

$$B = \{p_i \pi^\ell p_j^*\}_{i,j \in \{1,\dots n\}, \ell \geqslant 1} \cup \{p_i (\pi^*)^\ell p_j^*\}_{i,j \in \{1,\dots n\}, \ell \geqslant 1} \cup \{p_i p_j^*\}_{i,j \in \{1,\dots n\}}$$

jest bazą $L_K(E)$.

Pokażemy, że $L_K(E) \cong \mathbb{M}_n(K[x, x^{-1}])$. Istotnie, jeśli $E(i,j)$ oznacza macierz z dokładnie jedną jedynką w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, to ϕ na elementach z bazy zdefiniowane następująco:

$$\phi(p_i \pi^\ell p_j^*) = x^\ell E(i,j), \quad \phi(p_i (\pi^*)^\ell p_j^*) = x^{-\ell} E(i,j), \quad \phi(p_i p_j^*) = E(i,j)$$

rozszerza się do izomorfizmu algebr.

Z [19, Theorem 3.3] centrum $Z(L_K(E))$ algebry $L_K(E)$ jest rozpięte przez zbiór

$$B_Z = \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \pi^\ell p_i^* \right\}_{\ell \geqslant 1} \cup \left\{ \sum_{i=1}^n p_i (\pi^*)^\ell p_i^* \right\}_{\ell \geqslant 1} \cup \left\{ \sum_{i=1}^n p_i p_i^* \right\}.$$

Z definicji algebra $L_K(E_s^0, E_r^0)$ jest rozpięta przez wielomiany z B, które zaczynają się w zbiorze E_s^0 i kończą się w E_r^0. Możemy tak dobrać indeksy, że istnieje $j \in \{1, \dots, n-1\}$, takie że $s(p_i) \in E_s^0$ dla każdego i spełniającego $1 \leqslant i \leqslant j$ oraz $s(p_i) \in E_r^0$ dla każdego i spełniającego $j < i \leqslant n$.

Niech $F = \mathrm{Frac}(K[x, x^{-1}])$ będzie ciałem ułamków nad dziedziną całkowitości $K[x, x^{-1}]$. Wtedy $\mathbb{M}_n(K[x, x^{-1}])$ jest podalgebrą $\mathbb{M}_n(F)$ nad ciałem K oraz przypomnijmy, że $\mathbb{M}_n(F) \cong L_F(\mathcal{E})$, gdzie graf $\mathcal{E}$ jest grafem z przykładu (2.2.2).

Niech $A = Z(L_K(E)) + L_K(E_s^0, E_r^0)$. Składając dwa wcześniej wspomniane izomorfizmy (i nadużywając notację) możemy zauważyć, że obraz A w $L_F(\mathcal{E})$ jest równy $K[x, x^{-1}] + L_{K[x,x^{-1}]}(\mathcal{E}_s^0, \mathcal{E}_r^0)$, gdzie $\mathcal{E}_s^0 = \{v_1, \dots, v_j\}$ i $\mathcal{E}_r^0 = \{v_{j+1}, \dots, v_n\}$.

Z Twierdzenia 4.2.1(1) $F \cdot 1 + L_F(\mathcal{E}_s^0, \mathcal{E}_r^0)$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $L_F(\mathcal{E})$. Rozważając element $r \in F \cdot 1 + L_F(\mathcal{E}_s^0, \mathcal{E}_r^0)$, wnioskujemy, że $r = ab^{-1}$ dla pewnych elementów $a \in K[x, x^{-1}] + L_{K[x,x^{-1}]}(\mathcal{E}_s^0, \mathcal{E}_r^0)$ i $b \in K[x, x^{-1}]$.

Skoro $F \cdot 1 = Z(L_F(\mathcal{E}))$, to wnioskujemy, że $K[x, x^{-1}] + L_{K[x,x^{-1}]}(\mathcal{E}_s^0, \mathcal{E}_r^0)$ jest maksymalną przemienną podalgebrą algebry $L_{K[x,x^{-1}]}(\mathcal{E})$. Ponieważ $L_{K[x,x^{-1}]}(\mathcal{E})$ jest obrazem $\mathbb{M}_n(K[x, x^{-1}])$ w $L_F(\mathcal{E})$, to możemy zauważyć, że A jest maksymalną przemienną podalgebrą w $L_K(E)$. □

4.2.5 Dalsze rozważania i komentarze

Graf E nazywany jest *kometą*, jeśli E ma dokładnie jeden cykl π, który nie ma wyjść i $v \geqslant E^0(\pi)$ dla każdego $v \in E^0$.

Zacznijmy od następujących spostrzeżeń.

Uwaga 4.2.3.

(a) Dla dowolnego podziału (E_s^0, E_r^0) zbioru wierzchołków E^0 (gdzie $|E^0| > 1$) mamy $L_K(E_s^0, E_r^0) \cap Z(L_K(E)) = \{0\}$. Jest jasne, że $Z(L_K(E))$ jest podzbiorem każdej maksymalnej przemiennej podalgebry $L_K(E)$. W takim razie, z Twierdzenia 4.2.1(1) oraz dowodu pierwszej części Twierdzenia 4.2.1(2), jeśli $L_K(E)$ jest algebrą pierwszą, to

$$Z(L_K(E)) = \begin{cases} K \cdot 1, & \text{jeśli } |E| < \infty \text{ i } E \text{ nie jest kometą,} \\ \{0\}, & \text{jeśli } |E^0| = \infty. \end{cases}$$

(b) Gdy E jest grafem skończonego rzędu, a algebra ścieżek Leavitta $L_K(E)$ jest prosta, to każdy cykl w E ma wyjście (zob. [6, Theorem 3.11]). Łącząc ten fakt z powyższą uwagą, dostajemy (zob. [43, Theorem 4.2]): jeśli E jest grafem skończonego rzędu i algebra ścieżek

Leavitta $L_K(E)$ jest prosta, to jej centrum jest postaci

$$Z(L_K(E)) = \begin{cases} K \cdot 1, \text{ jeśli } |E| < \infty, \\ \{0\}, \text{ jeśli } |E^0| = \infty. \end{cases}$$

Uwaga 4.2.4. Rozważając $L_K(E_s^0, E_r^0)$ dla dowolnego podziału (E_s^0, E_r^0) zbioru E^0 oraz jądro przemienne $\mathcal{M}_K(E)$ (zob. Definicja 4.2.5) algebry $L_K(E)$ zachodzi $\mathcal{M}_K(E) \cap L_K(E_s^0, E_r^0) = \{0\}$.

Przypomnijmy, że dla każdego ciała K maksymalny ograniczenie górne wymiaru maksymalnej podalgebry przemiennej algebry macierzy $\mathbb{M}_n(K)$ wynosi $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$. Chcąc uogólnić powyższy fakt, dla grafu E wprowadzimy nowe pojęcie E-wymiaru. Pozwoli ono uzyskać podobne ograniczenie na wymiar przemiennych podalgebr pierwszych algebr ścieżek Leavitta.

Definicja 4.2.3. Niech E będzie grafem, takim że $|E^0| < \infty$, K będzie ciałem i niech A będzie podalgebrą $L_K(E)$. Największą liczbę d, taką że istnieje d różnych par wierzchołków $(v, w) \in E^0 \times E^0$, takich że $vAw \neq \{0\}$ i $vAw \subseteq A$, nazwiemy E-*wymiarem* A i będziemy oznaczać przez $\mathrm{Edim}(A)$.

Stwierdzenie 4.2.16. *Niech E będzie grafem, $|E^0| < \infty$ i K będzie ciałem. Jeśli A jest podalgebrą $L_K(E)$, to* $\mathrm{Edim}(E) \leqslant \dim_K(A)$.

Dowód. Niech A będzie podalgebrą $L_K(E)$ i niech

$$(v_1, w_1), (v_2, w_2), \ldots, (v_m, w_m)$$

będą wszystkimi parami $E^0 \times E^0$, dla których $v_iAw_i \neq \{0\}$ i $v_iAw_i \subseteq A$, $i = 1, \ldots, m$. Weźmy dla każdego i element $a_i \in A$, taki że $v_ia_iw_i \neq 0$. Wtedy elementy $v_1a_1w_1, \ldots, v_ma_mw_m$ są liniowo niezależne, co dowodzi nierówności pomiędzy wymiarami. □

Rozważając graf $\mathcal{E}$ przedstawiony w Przykładzie 2.2.2 i izomorfizm (2.3) widzimy, że dla dowolnej algebry A należącej do klasy wszystkich przemiennych podalgebr $L_K(\mathcal{E})$ zachodzi $\mathcal{E}\dim(A) \leqslant \dim_K(A) \leqslant \lfloor \frac{|\mathcal{E}^0|^2}{4} \rfloor + 1$.

Z drugiej strony, powołując się na informację znajdujące się w Rozdziale 4.1, istnieją przemienne podalgebry A algebry ścieżek Leavitta $L_K(\mathcal{E})$, dla których $\mathcal{E}\dim(A) = \lfloor \frac{|\mathcal{E}^0|^2}{4} \rfloor$.

Jest jasne, że jeśli $L_K(E)$ jest pierwszą algebrą ścieżek Leavitta, gdzie E jest grafem o skończonej liczbie wierzchołków i przynajmniej jednym cyklu i A jest jej przemienną podalgebrą, to wymiar $\dim_K(A)$ może być nieskończony, ale wciąż E-wymiar A jest skończony.

Stwierdzenie 4.2.17. *Niech K będzie ciałem i niech E będzie grafem o skończonej liczbie wierzchołków. Jeśli $L_K(E)$ jest algebrą pierwszą, to* $\mathrm{Edim}(A) \leqslant \lfloor \frac{|E^0|^2}{4} \rfloor$ *dla każdej przemiennej podalgebry A algebry $L_K(E)$. Dodatkowo, istnieje przemienna podalgebra A algebry $L_K(E)$, taka że* $\mathrm{Edim}(A) = \lfloor \frac{|E^0|^2}{4} \rfloor$.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że dla pewnej przemiennej podalgebry istnieje więcej niż $\lfloor \frac{|E^0|^2}{4} \rfloor$ par $(v_i, w_i) \in E^0 \times E^0$, takich że dla każdej z nich zachodzi $v_i A w_i \neq \{0\}$ i $v_i A w_i \subseteq A$. Wówczas istnieje wierzchołek u, taki że dla pewnych i, j, $i \neq j$, $u = v_i = w_j$ i albo $w_i \neq u$, lub $v_j \neq u$. Weźmy dowolny niezerowy element $v_j a u \in v_j A u \subseteq A$. Możemy założyć, że a jest jednomianem, więc $a = \alpha\beta^*$ dla pewnych ścieżek α, β. Niech $z = r(\alpha)$ i rozważmy jednomian $\delta\sigma^* \in \mathfrak{M}(z, w_i)$. Dla takiego jednomianu zachodzi $\beta\delta\sigma^* \neq 0$, więc również $a\beta\delta\sigma^* \neq 0$. Zauważmy, że $s(\beta) = r(\beta^*) = u$, co daje, że $\beta\delta\sigma^* \in A$. Zatem

$$\beta\delta\sigma^* a = a\beta\delta\sigma^* \neq 0,$$

ale to znaczy, że $v_j = u$ i $w_i = u$, sprzeczność.

Dla drugiej części dowodu określmy

$$q = \begin{cases} \frac{|E^0|^2}{2}, & \text{jeśli } |E^0| \text{ jest parzyste,} \\ \frac{|E^0|^2 - 1}{2}, & \text{jeśli } |E^0| \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Jeśli $v_1, \ldots, v_{|E^0|}$ są różnymi wierzchołkami grafu E, to przyjmijmy $E^0_s = \{v_1, \ldots, v_q\}$ i $E^0_r = \{v_{q+1}, \ldots, v_{|E^0|}\}$. Jest jasne, że $\mathrm{Edim}(K \cdot 1 + L_K(E^0_s, E^0_r)) = \lfloor \frac{|E^0|^2}{4} \rfloor$. □

4.2.6 O jądrze przemiennym algebry ścieżek Leavitta

W tym podrozdziale rozszerzymy pojęcie algebry ścieżek Leavitta przez zastąpienie współczynników z ciała K współczynnikami z pierścienia przemiennego z jedynką R. Badania tej konstrukcji zapoczątkował Tomforde w pracy [50]. Następnie przywołamy definicje pewnej przemiennej podalgebry algebry ścieżek Leavitta wprowadzonej w pracy [18]. Pokażemy inny od oryginalnego dowód, że wspomniana przemienna podalgebra jest maksymalną przemienną podalgebrą. W dowodzie odwołamy się tylko struktury algebry ścieżek Leavitta.

Definicja 4.2.4. Niech E będzie grafem i niech R będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. *Algebrą ścieżek Leavitta ze współczynnikami z R* nazywamy pierścień wolny R generowany przez zbiór $\{v : v \in E^0\}$, będący zbiorem parami ortogonalnych idempotentów oraz zbiór $\{e, e^* : e \in E^1\}$, spełniający następujące warunki:

1. $s(e)e = e = er(e)$ dla każdego $e \in E^1$.
2. $r(e)e^* = e^* = e^*s(e)$ dla każdego $e \in E^1$.
3. Dla każdych $e, f \in E^1$, $e^*e = r(e)$ oraz $e^*f = 0$, jeśli $e \neq f$.
4. Dla każdego $v \in E^0$ będącego wierzchołkiem regularnym, dla którego istnieje przynajmniej jedna krawędź, której jest on początkiem, zachodzi $v = \sum_{\{e \in E^1 : s(e)=v\}} ee^*$

Algebrę tę będziemy oznaczać przez $L_R(E)$.

Definicja 4.2.5. *Jądrem przemiennym* algebry ścieżek Leavitta $L_R(E)$ nad przemiennym pierścieniem z jedynką R nazywamy podalgebrę $L_R(E)$ generowaną przez wszystkie elementy postaci $\alpha\alpha^*$, $\alpha\lambda\alpha^*$ i $\alpha\lambda^*\alpha^*$, gdzie α jest ścieżką w E i λ jest cyklem bez wyjść. Jądro przemienne będziemy oznaczać przez $\mathcal{M}_R(E)$.

Na mocy [18, Proposition 4.5] i [18, Theorem 4.13] $\mathcal{M}_R(E)$ dla dowolnego grafu E i pierścienia R jest maksymalną przemienną podalgebrą $L_R(E)$.

Stwierdzenie 4.2.18 ([18], Theorem 4.13)**.** *Niech E będzie grafem, R niech będzie przemiennym pierścieniem z jedynką. Algebra $\mathcal{M}_R(E)$ jest maksymalną przemienną podalgebrą algebry $L_R(E)$ i $\mathcal{M}_R(E) = \Lambda$, gdzie*

$$\Lambda = \{x \in L_R(E) : \quad x\alpha\alpha^* = \alpha\alpha^*x, \ \textit{dla każdego } \alpha \in \mathrm{Path}(E)\}.$$

Dowód. Fakt, że $\mathcal{M}_R(E)$ jest przemienną algebrą wynika z [18, Proposition 4.5]. Jasnym jest, że $\mathcal{M}_R(E) \subseteq \Lambda$. Zauważmy, że zbiór Λ jest zamknięty ze względu na mnożenie.

Załóżmy nie wprost, że istnieje $x \in \Lambda \setminus \mathcal{M}_R(E)$. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że element x jest elementem jednorodnym. Przyjmijmy, że x jest w postaci zredukowanej i niech n będzie najmniejszą nieujemną liczbą, dla której $M_n(x) \neq \emptyset$ (zob. Definicja 4.2.2). Niech $\alpha\beta^* \in M_n(x)$. Możemy również założyć, że $\alpha\beta^* \notin \mathcal{M}_R(E)$.

Ze Stwierdzenia 4.2.4 istnieją ścieżki γ i $\overline{\gamma}$, takie że

$$\gamma^*x\overline{\gamma} = \gamma^*\alpha\beta^*\overline{\gamma} = s(\gamma^*) = r(\overline{\gamma}). \tag{4.15}$$

Dodatkowo, $\gamma = \alpha\sigma$ i $\overline{\gamma} = \beta\sigma$ dla pewnej ścieżki σ.

Z definicji zbioru Λ i równania (4.15) mamy

$$x\gamma\gamma^*\overline{\gamma}\,\overline{\gamma}^* = \gamma\gamma^*x\overline{\gamma}\,\overline{\gamma}^* = \gamma\overline{\gamma}^* = \alpha\sigma\sigma^*\beta^* \neq 0,$$

co oznacza, że $\gamma^*\overline{\gamma} \neq 0$. Zatem $\sigma^*\alpha^*\beta\sigma \neq 0$, czyli również $\alpha^*\beta \neq 0$. Jeśli $|\alpha| = |\beta|$, to $\alpha\beta^* = \alpha\alpha^* \in \mathcal{M}_R(E)$, sprzeczność. Wnioskujemy więc, że albo $|\alpha| > |\beta|$, albo $|\alpha| < |\beta|$.

Przyjmijmy najpierw, że $|\alpha| > |\beta|$. W tym przypadku $\alpha = \beta\lambda$ dla pewnej ścieżki λ, więc $\alpha\beta^* = \beta\lambda\beta^*$. Ponieważ $\alpha\beta^* \notin \mathcal{M}_R(E)$ i $\beta\lambda\beta^* \neq 0$, to λ jest zamkniętą ścieżką, która nie jest postaci c^ℓ, ani $(c^*)^\ell$, gdzie c jest cyklem bez wyjścia i ℓ jest dodatnią liczba całkowitą. Przyjmijmy zatem, że

$$\lambda = e_1e_2\dots e_m$$

dla pewnych krawędzi $e_1, e_2, \dots, e_m$, gdzie $s(e_1) = r(e_m)$ i istnieje krawędź f, taka że $s(e_j) = s(f)$ i $e_j \neq f$ dla pewnego j, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Określmy $z = \beta\lambda\sigma\sigma^*\beta^*$. Zauważmy, że z (4.15) i faktu, że zbiór Λ jest zamknięty na mnożenie zachodzi

$$z = \beta\lambda\sigma\sigma^*\beta^* = \gamma\overline{\gamma}^* = \gamma\gamma^*x\overline{\gamma}\overline{\gamma}^* \in \Lambda \setminus \{0\}. \tag{4.16}$$

W takim razie mamy $\beta\sigma\sigma^*\beta^*z = z\beta\sigma\sigma^*\beta^*$, co daje

$$\beta\sigma\sigma^*\lambda\sigma\sigma^*\beta^* = \beta\lambda\sigma\sigma^*\beta^* = z \neq 0.$$

Czyli $\sigma^*\lambda\sigma \neq 0$ oraz

$$\sigma^*\lambda\sigma = e_ie_{i+1}\dots e_me_1e_2\dots e_{i-1}$$

dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Rozważmy ścieżkę $\delta = e_ie_{i+1}\dots e_{j-1}f$, której długość jest nie większa niż n oraz określmy niezerowy element

$$y = \beta\sigma\delta\delta^*\sigma^*\beta^* = \beta\sigma\delta(\beta\sigma\delta)^*.$$

Korzystając z równania (4.16) dostajemy, że $zy = yz$. Zauważmy, że $zy = \beta\lambda\sigma\delta\delta^*\sigma^*\beta^* \neq 0$. Z drugiej strony w iloczynie yz pojawia się czynnik $\delta^*\sigma^*\lambda\sigma$. Ponieważ $f \neq e_j$, to

$$\delta^*\sigma^*\lambda\sigma = (f^*e_{j-1}^*\dots e_{i+1}^*e_i^*)(e_ie_{i+1}\dots e_me_1e_2\dots e_{i-1}) = 0.$$

Zatem $yz = 0$, sprzeczność.

W podobny sposób można rozważyć przypadek, gdy $|\alpha| < |\beta|$.

Udowodniliśmy zatem, że $\Lambda = \mathcal{M}_R(E)$. Maksymalność $\mathcal{M}_R(E)$ wynika z ostatnich argumentów, przedstawionych w dowodzie [18, Theorem 4.13]. Pokażemy, że $\mathcal{M}_R(E)$ jest maksymalną przemienną podalgebrą $L_R(E)$. Załóżmy, że istnieje $\mathcal{C}$ - przemienna podalgebra $L_R(E)$, dla której $\mathcal{M}_R(E) \leqslant \mathcal{C}$, ale

$$\mathcal{C} \subseteq \{x \in L_R(E) : x\alpha\alpha^* = \alpha\alpha^* x, \text{ dla każdego } \alpha \in \mathrm{Path}(E)\} = \mathcal{M}_R(E).$$

Zatem $\mathcal{C} = \mathcal{M}_R(E)$. $\square$

Rozdział 5

Prawostronny warunek (a.c.) w pierścieniach wielomianów i pierścieniach szeregów potęgowych

Na podstawie pracy [15].

5.1 Tło i kontekst badawczy

W tym rozdziale poruszymy tematykę warunku (a.c.) zdefiniowaną na początku rozdziału trzeciego. Przedstawimy pewną konstrukcję pierścienia, odpowiadająca na pytanie zadane przez Honga i innych w pracy [28].

Pokażemy konstrukcję takiego pierścienia R, który nie spełnia warunku (a.c.), ale zarówno pierścień wielomianów $R[x]$, jak i pierścień szeregów potęgowych $R[[x]]$ go spełniają.

Pierścienie spełniające warunek anihilatorowy są rozważane w wielu pracach, zarówno w przypadku pierścieni przemiennych (zob. [27], [31], [36]), jak i w przypadku nieprzemiennym (zob. [28]). Pierścienie prawostronnie Bézout, quasi-Beara, w tym również pierścienie pierwsze, spełniają warunek (a.c.) (zob. [28]).

Dla pierścienia R i $f \in R[x]$ (również dla $f \in R[[x]]$) oraz $i \geqslant 0$, przyjmujemy oznaczenie $(f)_i$ dla współczynnika stojącego przy wyrazie x^i w wielomianie f. Jeśli w f nie będą występować dodatkowe indeksy, będziemy pomijać nawiasy i pisać f_i.

Dowód następnego lematu jest natychmiastowy.

Lemat 5.1.1. *Niech K będzie ciałem i niech X będzie zbiorem wolnych generatorów. Niech R będzie algebrą ilorazową wolnej algebry $K\langle X\rangle$ przez ideał generowany przez jednorodne relacje. Wtedy:*

1. *Jeśli α, β są niezerowymi elementami R, takimi że $\operatorname{supp}(\alpha)\cap K \neq \emptyset$ lub $\operatorname{supp}(\beta)\cap K \neq \emptyset$, to $\alpha\beta \neq 0$.*

2. *Jeśli $h = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j$ są niezerowymi elementami $R[[x]]$ (w szczególności h, g mogą być wielomianami), takimi że dla pewnego indeksu i zachodzi $\operatorname{supp}(h_i)\cap K \neq \emptyset$ lub dla pewnego indeksu j, $\operatorname{supp}(g_j) \cap K \neq \emptyset$, to $hg \neq 0$.*

5.2 Warunek (a.c.) nie przenosi się na wielomiany i szeregi potęgowe

W tym podrozdziale pokażemy konstrukcję pierścienia A, spełniacego prawostronny warunek anihilatorowy, takiego że pierścień wielomianów $A[x]$ i pierścień szeregowych potęgowych $A[[x]]$ nie spełniają tego warunku. W tym celu rozważymy algebrę ilorazową z odpowiednio wybranymi relacjami, które zapewnią, że algebra będzie skończenie wymiarowa. W algebrze tej dla dowolnego ideału prawostronnego generowanego przez dwa elementy algebry wskażemy prawostronny ideał główny o tym samym anihilatorze prawostronnym.

Niech V będzie przestrzenią wektorową rozpiętą przez elementy zbioru

$$B = \{e_0, e_1, u_0, u_1, z_0, z_1\}$$

nad ciałem $K = \mathbb{Z}_2$. Niech $S(V)$ oznacza zbiór wszystkich K-wektorowych podprzestrzeni W przestrzeni V, takich że $W = W_{eu} + W_z$, gdzie W_{eu} jest podprzestrzenią przestrzeni $span(\{e_0, e_1, u_0, u_1\})$ oraz W_z jest co najwyżej jednowymiarową podprzestrzenią $span(\{z_0, z_1\})$.

Rozważmy wolną algebrę $K\langle X\rangle$, gdzie

$$X = \{a_0, a_1, b_0, b_1, e_0, e_1, u_0, u_1, z_0, z_1, d_W : W \in S(V)\}.$$

Dla $W = \{0\}$ element d_W będziemy oznaczać przez d_0. Zauważmy, że zbiór X jest skończony.

Określmy ideał I algebry $K\langle X\rangle$ generowany przez następujące relacje:

(R1) $a_0e_0 = a_1e_1 = b_0u_0 = b_1u_1 = 0$,

(R2) $b_1u_0 = a_0e_1$, $b_0u_1 = a_1e_0$,

(R3) $a_0z_0 = a_1z_1 = b_0z_0 = b_1z_1 = 0$,

(R4) $a_1z_0 = a_0z_1$, $b_1z_0 = b_0z_1$,

(R5) dla $i, j \in \{0, 1\}$, $a_iu_j = b_ie_j = 0$,

(R6) $\{e_0, e_1, u_0, u_1, z_0, z_1\} \cdot v = 0$, dla dowolnego $v \in X$,

(R7) $v \cdot \{d_W : W \in S(V)\} = 0$, dla dowolnego $v \in X$,

(R8) $v_1v_2v_3 = 0$, dla dowolnych $v_1, v_2, v_3 \in X$,

(R9) dla dowolnego $W \in S(V)$, $d_W \cdot t = 0$ dla każdego $t \in W$.

Pokażemy, że algebra $A = K\langle X\rangle/I$ jest pierścieniem ze wstępu tego podrozdziału. Klasy abstrakcji będące elementami tej algebry będziemy utożsamiać z ich reprezentantami.

Zauważmy, że ze względu na zbiór generatorów X i relację (R8), algebra A jest skończenie wymiarowa.

Pokażemy, korzystając z Diamond Lemma (zob. 1.1.2), że każdy element powyższej algebry ma jednoznacznie zdefiniowaną prezentację.

Niech zbiór $\mathfrak{M}(X)$ oznacza zbiór wszystkich jednomianów nad alfabetem X. Ustalmy dobry porządek $\leqslant$ na zbiorze X przez

$$a_0 < a_1 < b_0 < b_1 < e_0 < e_1 < u_0 < u_1 < z_0 < z_1,$$

dowolne dobre uporządkowanie zmiennych d_W i określenie, że wszystkie one są większe od wcześniej wymienionych zmiennych. Na zbiorze $\mathfrak{M}(X)$ ustalmy porządek shortlex, to jest taki porządek, w którym ciągi są uporządkowane ze względu na długość, a ciągi tej samej długości są uporządkowane leksykograficzne zgodnie z porządkiem $\leqslant$ na zbiorze X.

Rozważmy system redukcji

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_9,$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{(a_0e_0, 0),\ (a_1e_1, 0),\ (b_0u_0, 0),\ (b_1u_1, 0)\}, && \text{(por. (R1))},\\
S_2 &= \{(b_1u_0, a_0e_1),\ (b_0u_1, a_1e_0)\}, && \text{(por. (R2))},\\
S_3 &= \{(a_0z_0, 0),\ (a_1z_1, 0),\ (b_0z_0, 0),\ (b_1z_1, 0)\}, && \text{(por. (R3))},\\
S_4 &= \{(a_1z_0, a_0z_1),\ (b_1z_0, b_0z_1)\}, && \text{(por. (R4))},\\
S_5 &= \bigcup_{i,j\in\{0,1\}} \{(a_iu_j, 0),\ (b_ie_j, 0)\}, && \text{(por. (R5))},\\
S_6 &= \bigcup_{i\in\{0,1\},\ v\in X} \{(e_iv, 0), (u_iv, 0), (z_iv, 0)\}, && \text{(por. (R6))},\\
S_7 &= \bigcup_{v\in X,\ W\in W} \{(vd_W, 0)\}, && \text{(por. (R7))},\\
S_8 &= \bigcup_{v_1,v_2,v_3\in X} \{(v_1v_2v_3, 0)\}, && \text{(por. (R8))},\\
S_9 &= \bigcup_{W\in S(V),\ t\in W} \{(d_Wt, 0)\}, && \text{(por. (R9))}.
\end{aligned}
$$

Zacznijmy od pokazania rozwiązalności nakładań.

Załóżmy, że dla pewnych $(m_i, n_i), (m_j, n_j) \in S$ istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \langle X\rangle$, takie że $\alpha\beta = m_i$ i $\beta\gamma = m_j$. Zauważmy, że w S dla każdego ℓ zachodzi $|n_\ell| = 2$ lub $n_\ell = 0$. Zatem, jeśli $\alpha \neq 1$, to istnieje redukcja r_1, taka że $r_1(\alpha n_j) = 0$. Podobnie dla $\gamma \neq 1$ istnieje redukcja r_2, dla której $r_2(n_i\gamma) = 0$. Zatem, gdy $\alpha \neq 1$ i $\gamma = 1$, to $\alpha\beta = m_i$ i $\beta = m_j$. Na podstawie budowy zbioru S, stwierdzamy, że $n_i = 0$, więc również $n_i\gamma = 0$ oraz istnieje redukcja r_1, dla której $r_1(\alpha n_j) = 0$. W analogiczny sposób możemy rozważyć sytuację, gdy $\alpha = 1$ i $\gamma \neq 1$. W przypadku, gdy $\alpha = 1$ i $\gamma = 1$ mamy $m_i = m_j$, więc $\alpha n_j = n_j = n_i = n_i\gamma$.

Rozwiązalność inkluzji można pokazać w podobny sposób.

Przedstawmy teraz dla każdego elementu jednoznacznie zdefiniowaną postać w następujący sposób: Niech α będzie elementem A. Jeśli jednomian m występuje w relacji (R2) lub (R4) po lewej stronie jako składnik α, to zastępujemy go jednomianem stojącym po prawej stronie w odpowiedniej relacji. Jeśli dla pewnego $W \in S(V)$ i pewnych $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \{e_0, e_1, u_0, u_1\}$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, takich że $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ zachodzi

$$d_Wt_1 + d_Wt_2 + \ldots + d_Wt_k = 0 \text{ (zob. (R9))},$$

to jeżeli jednomian d_Wt_k występuje w α, to jest on zastąpiony przez $d_Wt_1 + d_Wt_2 + \ldots + d_Wt_{k-1}$. Natomiast, jeśli mamy relację $d_Wz_0 + d_Wz_1 = 0$ dla pewnego $W \in S(V)$, wtedy d_Wz_1 w α zastąpimy przez d_Wz_0.

Jest jasne, że radykał Jacobsona $\mathbb{J}(A)$ algebry A jest ideałem generowanym przez wszystkie elementy X, więc również zachodzi $A/\mathbb{J}(A) \cong K$.

W dalszej części tego rozdziału będziemy się trzymać następującego oznaczenia: jeśli $\alpha \in \mathbb{J}(A)$, to $\alpha = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}$, gdzie $\alpha^{(1)}$ jest sumą jednomianów z X, natomiast $\alpha^{(2)}$ jest sumą jednomianów z X^2. Dodatkowo przez D oznaczmy przestrzeń rozpiętą przez wszystkie elementy d_W; $D = span(\{d_W : W \in S(V)\})$.

Lemat 5.2.1. *Niech α będzie niezerowym elementem A. Wówczas spełnione są następujące warunki:*

1. *Jeśli $\alpha \in \mathbb{J}(A)$ i $\alpha^{(1)} \neq 0$, to $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = \operatorname{ann}_r^A(\alpha^{(1)})$.*

2. *Dla $\beta \in span(\{e_0, e_1, u_0, u_1\})$ i $\gamma \in span(\{z_0, z_1\})$,*

$$\alpha(\beta + \gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha\gamma = 0.$$

3. *Jeśli $\alpha \in span(\{a_0, a_1, b_0, b_1, d_W : W \in S(V)\})$, to $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = U + D + \mathbb{J}(A)^2$ dla pewnego $U \in S(V)$.*

Dowód. 1. Niech α będzie elementem należącym do $\mathbb{J}(A)$, takim że $\alpha^{(1)} \neq 0$.

Rozważmy element $\beta \in A$ i przypuśćmy, że β jest prawostronnym anihilatorem αA. W szczególności $\alpha\beta = 0$. Z warunku (R8) i stosując notację przedstawioną powyżej, możemy zapisać $\beta = k + \beta^{(1)} + \beta^{(2)}$, gdzie $k \in K$, $\beta^{(1)} \in X$ oraz $\beta^{(2)} \in X^2$. Zatem

$$(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \cdot (k + \beta^{(1)} + \beta^{(2)}) = 0,$$

co po wymnożeniu daje

$$k\alpha^{(1)} + \alpha^{(1)}\beta^{(1)} + \alpha^{(1)}\beta^{(2)} + k\alpha^{(2)} + \alpha^{(2)}\beta^{(1)} + \alpha^{(2)}\beta^{(2)} = 0.$$

Ponownie korzystając z (R8) mamy

$$k\alpha^{(1)} + \alpha^{(1)}\beta^{(1)} + k\alpha^{(2)} = 0.$$

Ponieważ $\alpha^{(1)} \neq 0$, więc $k = 0$. Zatem z powyższego równania otrzymujemy $\alpha^{(1)}\beta^{(1)} = 0$, co daje $\alpha^{(1)}\beta = \alpha^{(1)}(\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) = 0$. Pokazaliśmy więc, że $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) \subseteq \operatorname{ann}_r^A(\alpha^{(1)})$.

Podobnie pokażemy przeciwną inkluzję. Niech element $\beta \in A$ jest prawostronnym anihilatorem $\alpha^{(1)}$ i niech $\gamma \in A$. Jak wcześniej zapiszmy

$$\beta = k + \beta^{(1)} + \beta^{(2)}, \ \gamma = \ell + \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)},$$

gdzie $k, \ell \in K$, $\beta^{(1)}, \gamma^{(1)} \in X$ oraz $\beta^{(2)}, \gamma^{(2)} \in X^2$.

Mamy wtedy

$$k\alpha^{(1)} + \alpha^{(1)}\beta^{(1)} + \alpha^{(1)}\beta^{(2)} = \alpha^{(1)}(k + \beta^{(1)} + \beta^{(2)}) = 0,$$

co daje $k\alpha^{(1)} + \alpha^{(1)}\beta^{(1)} = 0$. Wnioskujemy więc, że $k = 0$ i $\alpha^{(1)}\beta^{(1)} = 0$. Z ostatnich równości i warunku (R8)

$$\alpha\gamma\beta = (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \cdot (\ell + \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}) \cdot (\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) = \ell\alpha^{(1)}\beta^{(1)} = 0,$$

z czego wynika zawieranie $\mathrm{ann}_r^A(\alpha^{(1)}) \subseteq \mathrm{ann}_r^A(\alpha A)$. Wykazaliśmy więc, że $\mathrm{ann}_r^A(\alpha A) = \mathrm{ann}_r^A(\alpha^{(1)})$.

2. Skoro $\beta \in span(\{e_0, e_1, u_0, u_1\})$ i $\gamma \in span(\{z_0, z_1\})$, to rozważając relacje definiujące algebrę A otrzymujemy $\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha\gamma = 0$, co kończy dowód rozważanego punktu.

3. Niech $\alpha \in span(\{a_0, a_1, b_0, b_1, d_W : W \in S(V)\})$ i $\alpha \neq 0$. Z punktu 1. mamy $\mathrm{ann}_r^A(\alpha A) = \mathrm{ann}_r^A(\alpha)$. Zauważmy, że

$$\mathrm{ann}_r^A(\alpha) = \mathrm{ann}_r^A(\alpha) \cap V + D + \mathbb{J}(A)^2.$$

Ponadto z punktu 2.

$$\begin{aligned}\mathrm{ann}_r^A(\alpha) \cap V = {} & (\mathrm{ann}_r^A(\alpha) \cap span(\{e_0, e_1, u_0, u_1\})) \\ & + (\mathrm{ann}_r^A(\alpha) \cap span(\{z_0, z_1\})).\end{aligned}$$

Jeśli $a_0 \in \mathrm{supp}(\alpha)$, to $\alpha z_1 \neq 0$. Istotnie $a_0 z_1$ pojawi się w jednomianie po redukcji, a zatem również w nośniku αz_1. Podobnie postępujemy z dowolnie innym generatorem, mogącym należeć do nośnika α (ewentualnie dodatkowo korzystając z relacji (R4) lub (R9)). Skoro $\mathrm{ann}_r^A(\alpha) \cap span(\{z_0, z_1\})$ nie jest przestrzenią dwuwymiarową, więc mamy

$$U = \mathrm{ann}_r^A(\alpha) \cap V \in S(V)$$

i $\mathrm{ann}_r^A(\alpha A) = U + D + \mathbb{J}(A)^2$, co chcieliśmy pokazać. □

Stwierdzenie 5.2.2. *Algebra A spełnia (prawostronny) warunek (a.c.).*

Dowód. Opiszmy najpierw prawostronne anihilatory niezerowych ideałów głównych algebry A.

Niech $\alpha \in A$ będzie niezerowym elementem. Jeśli $1 \in \operatorname{supp}(\alpha)$, to α jest elementem odwracalnym i $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = \operatorname{ann}_r^A(A) = \{0\}$. Możemy więc założyć, że $1 \notin \operatorname{supp}(\alpha)$. Jeśli $\alpha^{(1)} \in V$, to

$$\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = \mathbb{J}(A).$$

Jeśli $\alpha^{(1)} \neq 0$ i $\operatorname{supp}(\alpha^{(1)}) \cap \{a_0, a_1, b_0, b_1, d_W : W \in S(V)\} \neq \emptyset$, to korzystając z relacji (R6) i Lematu 5.2.1 zauważamy, że

$$\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = \operatorname{ann}_r^A(\alpha^{(1)}) = U + D + \mathbb{J}(A)^2,$$

dla pewnego $U \in S(V)$.

Teraz możemy dokończyć dowód Stwierdzenia. Ponieważ dowolny element należący do $A \setminus \mathbb{J}(A)$ jest odwracalny, to wystarczy pokazać, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{J}(A)$, $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A + \beta A) = \operatorname{ann}_r^A(\gamma A)$ dla pewnego $\gamma \in A$.

Rozważmy przypadek, gdy $\alpha, \beta \in \mathbb{J}(A)$ i dla tych elementów

$$\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = \operatorname{ann}_r^A(\alpha^{(1)}) = U_1 + D + \mathbb{J}(A)^2$$

oraz

$$\operatorname{ann}_r^A(\beta A) = \operatorname{ann}_r^A(\beta^{(1)}) = U_2 + D + \mathbb{J}(A)^2,$$

dla pewnych $U_1, U_2 \in S(V)$. Oczywiście $U_1 \cap U_2 \in S(V)$. Jeśli $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, to $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A + \beta A) = D + \mathbb{J}(A)^2 = \operatorname{ann}_r^A(d_0 A)$. W przeciwnym przypadku $d_{U_1 \cap U_2} \cdot (U_1 \cap U_2) = 0$ (z relacji (R9)) oraz

$$\operatorname{ann}_r^A(\alpha A + \beta A) = (U_1 \cap U_2) + D + \mathbb{J}(A)^2 = \operatorname{ann}_r^A(d_{U_1 \cap U_2} A).$$

Kolejny przypadek to $\alpha \in \mathbb{J}(A)$, dla którego $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = \operatorname{ann}_r^A(\alpha^{(1)}) = U + D + \mathbb{J}(A)^2$, gdzie $U \in S(V)$, oraz $\beta \in \mathbb{J}(A)$ i $\operatorname{ann}_r^A(\beta A) = \mathbb{J}(A)$. Wówczas $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A + \beta A) = \operatorname{ann}_r^A(\alpha A)$.

Analogicznie możemy pokazać pozostałe dwa przypadki, gdy $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = \mathbb{J}(A)$ i $\operatorname{ann}_r^A(\beta A) = U + D + \mathbb{J}(A)^2$, gdzie $U \in S(V)$ oraz gdy $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = \operatorname{ann}_r^A(\beta A) = \mathbb{J}(A)$. To na mocy uwagi [28, Remark 1(2)] kończy dowód. $\square$

Teraz pokażemy, że dla tak skonstruowanego pierścienia A, pierścień wielomianów $A[x]$ nie spełnia warunku (a.c.).

Dla dowolnego elementu pierścienia wielomianów $f \in A[x]$ istnieją $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, takie że $f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)}$ i wszystkie niezerowe współczynniki $f^{(0)}$ są równe 1, nośniki wszystkich niezerowych współczynników $f^{(1)}$ są podzbiorem X, i nośniki wszystkich niezerowych współczynników z $f^{(2)}$ są podzbiorem X^2. Na przykład dla wielomianu

$$f = a_0 + (a_1 e_0 + 1)x + b_1 x^3,$$

mamy $f^{(0)} = x$, $f^{(1)} = a_0 + b_1 x^3$, $f^{(2)} = a_1 e_0 x$. Co więcej dla $i \in 0, 1, 2$ oraz $j \in \mathbb{N}$ przyjmijmy oznaczenie $(f^{(i)})_j$ na współczynnik stojący przy x^j w wielomianie $f^{(i)}$. Zauważmy, że $f^{(0)}$ należy do centrum $A[x]$.

Stwierdzenie 5.2.3. *Pierścień wielomianów $R = A[x]$ nie spełnia warunku (a.c.).*

Dowód. Pokażemy, że $\operatorname{ann}_r^R((a_0 + a_1 x)R + (b_0 + b_1 x)R) \neq \operatorname{ann}_r^R(fR)$ dla każdego $f \in R$.

Załóżmy nie wprost, że dla pewnego $f \in R$ zachodzi

$$\operatorname{ann}_r^R((a_0 + a_1 x)R + (b_0 + b_1 x)R) = \operatorname{ann}_r^R(fR). \tag{5.1}$$

Zauważmy, że

$$z_0 + z_1 x \in \operatorname{ann}_r^R((a_0 + a_1 x)R + (b_0 + b_1 x)R).$$

Istotnie, korzystając z relacji definiujących algebrę A, dla dowolnych wielomianów $g, h \in R$ zachodzi

$$((a_0 + a_1 x)g + (b_0 + b_1 x)h) \cdot (z_0 + z_1 x) =$$

$$(a_0 z_0 + (a_1 z_0 + a_0 z_1)x + a_1 z_1 x^2)g + (b_0 z_0 + (b_1 z_0 + b_0 z_1)x + b_1 z_1 x^2)h = 0.$$

Zatem mamy także $f(z_0 + z_1 x) = 0$ i w szczególności $f^{(1)}(z_0 + z_1 x) = 0$.

Pokażemy teraz, że dla dowolnego $W \in S(V)$ i dowolnego $i \geqslant 0$ element d_W nie należy do nośnika $\operatorname{supp}((f^{(1)})_i)$. Istotnie, w przeciwnym przypadku niech ℓ będzie najmniejszą liczbą, taką że nośnik $(f^{(1)})_\ell$ zawiera pewien element d_W, dla przestrzeni $W \in S(V)$. Ponieważ $(f^{(1)})_\ell z_0 + (f^{(1)})_{\ell-1} z_1 = 0$ dla $\ell \geqslant 1$ i $(f^{(1)})_\ell z_0 = 0$ dla $\ell = 0$, to można zauważyć, że $d_W z_0 = 0$. Ponieważ $W \in S(V)$ i $z_0 \in W$, to $z_1 \notin W$. W takim razie $d_W z_1 \neq 0$ i $(f^{(1)})_\ell z_1 \neq 0$. Dodatkowo, $d_W z_1$ występuje w nośniku zredukowanego jednomianu $(f^{(1)})_\ell z_1$. Ponieważ $d_W z_1$ nie może pojawić się w nośniku $(f^{(1)})_{\ell+1} z_0$, wnioskujemy, że współczynnik przy $x^{\ell+1}$ w $f^{(1)}(z_0 + z_1 x)$ jest niezerowy, sprzeczność.

Z Lematu 5.1.1 dostajemy $f = f^{(1)} + f^{(2)}$. Z powyższych rozważań, dla dowolnego $i \geqslant 0$

$$\operatorname{supp}((f^{(1)})_i) \subseteq \{a_0, a_1, b_0, b_1, e_0, e_1, u_0, u_1, z_0, z_1\}.$$

Dla dowolnego $y \in \{a_0, a_1, b_0, b_1, e_0, e_1, u_0, u_1, z_0, z_1\}$ definiujemy element $f_y^{(1)} \in R$ w następujący sposób: dla każdego $i \geqslant 0$

$$(f_y^{(1)})_i = \begin{cases} y & \text{gdy } y \in \operatorname{supp}((f^{(1)})_i), \\ 0 & \text{gdy } y \notin \operatorname{supp}((f^{(1)})_i). \end{cases}$$

Zgodnie z definicją zachodzi

$$f = f_{a_0}^{(1)} + f_{a_1}^{(1)} + f_{b_0}^{(1)} + f_{b_1}^{(1)} + \sum_{y \in B} f_y^{(1)} + f^{(2)}, \tag{5.2}$$

gdzie $B = \{e_0, e_1, u_0, u_1, z_0, z_1\}$. Dodatkowo

$$\left(f_{a_0}^{(1)} + f_{a_1}^{(1)}\right)(z_0 + z_1 x) = 0 \tag{5.3}$$

oraz

$$\left(f_{b_0}^{(1)} + f_{b_1}^{(1)}\right)(z_0 + z_1 x) = 0. \tag{5.4}$$

Ponieważ

$$\left(f_{b_0}^{(1)} + f_{b_1}^{(1)} + \sum_{y \in B} f_y^{(1)} + f^{(2)}\right) e_0 = 0$$

i $(a_0 + a_1 x)e_0 = a_1 e_0 x \neq 0$, to również $f_{a_0}^{(1)} + f_{a_1}^{(1)} \neq 0$ (z równań (5.1) i (5.2)). Podobnie, zastępując e_0 przez u_0, dostajemy, że $f_{b_0}^{(1)} + f_{b_1}^{(1)} \neq 0$.

Kolejny krok związany jest z wykorzystaniem równania (5.3). Niech k będzie najmniejszą liczbą, dla której

$$\left(f_{a_0}^{(1)} + f_{a_1}^{(1)}\right)_k \neq 0.$$

Jako, że $a_1 z_0 \neq 0$ i $a_0 z_0 = 0$, musi zachodzić $(f_{a_0}^{(1)})_k = a_0$ i $(f_{a_1}^{(1)})_k = 0$. Również nietrudno zauważyć, że

$$\text{dla dowolnego } i \geqslant k,\ (f_{a_0}^{(1)})_i = a_0 \Leftrightarrow (f_{a_1}^{(1)})_{i+1} = a_1. \tag{5.5}$$

Niech teraz $P = \{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (f_{a_0}^{(1)})_i = a_0\}$. Oczywiście ponieważ $k \in P$, to $P \neq \emptyset$. Dodatkowo z równania (5.5) mamy

$$\left(f_{a_0}^{(1)} + f_{a_1}^{(1)}\right) = (a_0 + a_1 x)\Big(\sum_{i \in P} x^i\Big).$$

Postępując analogicznie z elementami $f_{b_0}^{(1)}$ i $f_{b_1}^{(1)}$ zauważamy, że istnieje niepusty zbiór liczb naturalnych Q, taki że

$$\left(f_{b_0}^{(1)} + f_{b_1}^{(1)}\right) = (b_0 + b_1 x)\Big(\sum_{j \in Q} x^j\Big).$$

Z ostatnich dwóch równości i równania 5.5 zachodzi

$$f = (a_0 + a_1x)\Big(\sum_{i\in P} x^i\Big) + (b_0 + b_1x)\Big(\sum_{j\in Q} x^j\Big) + \sum_{y\in B} f_y^{(1)} + f^{(2)}.$$

Niech $g = g^{(0)} + g^{(1)} + g^{(2)}$ będzie dowolnym elementem R. Zauważmy, że $fg = fg^{(0)} + fg^{(1)}$.

Rozważmy element

$$h = (e_0 + e_1x)\Big(\sum_{j\in Q} x^j\Big) + (u_0 + u_1x)\Big(\sum_{i\in P} x^i\Big).$$

Wtedy $fg^{(1)}h = 0$ oraz

$$\begin{aligned}
fg^{(0)}h &= \left[(a_0 + a_1x)\Big(\sum_{i\in P} x^i\Big) + (b_0 + b_1x)\Big(\sum_{j\in Q} x^j\Big) + \sum_{y\in B} f_y^{(1)} + f^{(2)}\right] \cdot h \cdot g^0 \\
&= \left[(a_0 + a_1x)\Big(\sum_{i\in P} x^i\Big) + (b_0 + b_1x)\Big(\sum_{j\in Q} x^j\Big)\right] \cdot h \cdot g^0 \\
&= \left[(a_0 + a_1x)\Big(\sum_{i\in P} x^i\Big) + (b_0 + b_1x)\Big(\sum_{j\in Q} x^j\Big)\right] \\
&\cdot \left[(e_0 + e_1x)\Big(\sum_{j\in Q} x^j\Big) + (u_0 + u_1x)\Big(\sum_{i\in P} x^i\Big)\right] \cdot g^{(0)} \\
&= [(a_0e_0 + b_0u_0) + (a_0e_1 + a_1e_0 + b_0u_1 + b_1u_0)x + (a_1e_1 + b_1u_1)x^2] \\
&\cdot \Big(\sum_{i\in P} x^i\Big) \cdot \Big(\sum_{j\in Q} x^j\Big) \cdot g^{(0)} = 0,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z relacji (R1) i (R2). Mamy zatem $fgh = 0$. Z drugiej strony

$$(a_0 + a_1x)h = (a_0 + a_1x)(e_0 + e_1x)\Big(\sum_{j\in Q} x^j\Big) = [(a_0e_1 + a_1e_0)x]\Big(\sum_{j\in Q} x^j\Big) \neq 0.$$

W takim razie $h \in \operatorname{ann}_r^R(fR)$ oraz $h \notin \operatorname{ann}_r^R((a_0 + a_1x)R + (b_0 + b_1x)R)$, co przeczy równości 5.1. □

Korzystając z tych samych argumentów dostajemy podobne twierdzenie w wersji dla szeregów potęgowych.

Stwierdzenie 5.2.4. *Pierścień szeregów potęgowych $A[[x]]$ nie spełnia warunku (a.c.).*

5.3 Współczynniki nie muszą spełniać warunku anihilatorowego

W związku z poprzednim podrozdziałem uzasadnione jest pytanie o to, czy jeśli $A[x]$ lub $A[[x]]$ spełniają warunek (a.c.), to czy również algebra A go spełnia. W tym podrozdziale uzasadnimy, że nie zawsze tak jest. W tym celu skonstruujemy skończenie wymiarową algebrę A nad ciałem $K = \mathbb{Z}_2$, która nie spełnia warunku (a.c.), ale zarówno $A[x]$, jak i $A[[x]]$ spełniają ten warunek.

Pokażemy, że taką algebrą jest $A = K\langle X\rangle/I$, gdzie $K = \mathbb{Z}_2$, $X = \{a, b, c, d, d_1, d_2, d_3\}$ jest zbiorem generatorów oraz I jest ideałem $K\langle X\rangle$ generowanym przez następujące relacje:

(R1) $cd = bd = ad$, $cd_1 = ad_1$, $cd_2 = bd_2$, $bd_3 = ad_3$,

(R2) $\{d, d_1, d_2, d_3\}v = 0$ i $v \cdot \{a, b, c\} = 0$ dla każdego $v \in X$,

(R3) $v_1v_2v_3 = 0$, dla dowolnych $v_1, v_2, v_3 \in X$.

Jak w poprzednim podrozdziale klasy abstrakcji utożsamiane będą z ich reprezentantami.

Z określonych relacji wynika, że iloczyny pewnych dwóch elementów z X mogą być zareprezentowane na różne sposoby, ale nadal jako iloczyny dwóch elementów z X. Zatem można uporządkować elementy ze zbioru jednomianów nad X, porządkiem shortlex, w którym $a < b < c < d < d_1 < d_2 < d_3$ i skorzystać z Diamond Lemma. Pozwala on zareprezentować jednoznacznie dowolny element $\alpha \in A$ jako kombinację liniową elementów ze zbioru $B \cup \{1\}$, gdzie

$$B = \{a, b, c, d, d_1, d_2, d_3, ad, ad_1, bd_1, ad_2, bd_2, ad_3, cd_3\}.$$

Oczywiście algebra A posiadająca taką bazę jest skończenie wymiarową K-algebrą.

Stwierdzenie 5.3.1. *Algebra A nie spełnia (prawostronnego) warunku (a.c.).*

Dowód. Rozważmy ideał $L = (a + c)A + (b + c)A$. Zauważmy, że z relacji (R1) i (R3) $d \in \operatorname{ann}_r^A(L)$.

Załóżmy nie wprost, że istnieje takie $\alpha \in A$, że $\operatorname{ann}_r^A(\alpha A) = \operatorname{ann}_r^A(L)$. Zapiszmy

$$\alpha = k_0 + k_1a + k_2b + k_3c + k_4d + k_5d_1 + k_6d_2 + k_7d_3 + k_8w, \tag{5.6}$$

gdzie $k_i \in K$ dla $i \in \{0, \ldots, 8\}$ oraz w jest sumą jednomianów należących do $X^2 \cap B$. Ponieważ $d \in \operatorname{ann}_r^A(L) = \operatorname{ann}_r^A(\alpha A)$, więc $\alpha d = 0$. Stąd $k_0 = 0$, z relacji (R3) $wd = 0$ i z relacji (R2) $(k_4d + k_5d_1 + k_6d_2 + k_7d_3)d = 0$. Zatem również $k_1ad + k_2bd + k_3cd = 0$.

Załóżmy, że $k_3 = 0$. Wtedy $k_1ad + k_2bd = 0$ i z (R1) $k_1 = k_2$. Jeśli $k_1 = k_2 = 0$, to $d_3 \in \mathrm{ann}_r^A(\alpha A)$, ale $d_3 \notin \mathrm{ann}_r^A(L)$, sprzeczność. Natomiast, jeśli $k_1 = k_2 = 1$, to również dostajemy taką samą sprzeczność.

Możemy więc założyć, że $k_3 \neq 0$. Ponieważ $k_1ad + k_2bd + k_3cd = 0$, to albo $k_1 \neq 0$ i $k_2 = 0$, albo $k_1 = 0$ i $k_2 \neq 0$. Załóżmy, że $k_1 \neq 0$ i $k_2 = 0$. Wtedy

$$\alpha = k_1a + k_3c + k_4d + k_5d_1 + k_6d_2 + k_7d_3 + k_8w$$

i $d_1 \in \mathrm{ann}_r^A(\alpha A)$, ale $d_1 \notin \mathrm{ann}_r^A(L)$, sprzeczność. Symetrycznie, sprzeczność dostaniemy również gdy $k_1 = 0$ i $k_2 = 1$. W takim razie A nie spełnia prawostronnego warunku anihilatorowego. $\square$

W pozostałej części tego podrozdziału przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} T &= \{d, d_1, d_2, d_3, ad, ad_1, bd_1, ad_2, bd_2, ad_3, cd_3\}, \\ P &= \{a, b, c, ad, ad_1, bd_1, ad_2, bd_2, ad_3, cd_3\}, \\ W &= \{a, b, c\}. \end{aligned}$$

Przyjmijmy dodatkowo, że $e_1 = a+c$, $e_2 = b+c$ i $e_3 = a+b$. Dla dowolnego elementu $y \in B$ i dowolnego elementu $h \in A[x]$, którego współczynniki są w jednoznacznie wyznaczonej postaci, podobnie jak było w dowodzie Stwierdzenia 5.2.3, definiujemy element $h_y \in A[x]$ wzorem:

$$(h_y)_i = \begin{cases} y, & \text{gdy } y \in \mathrm{supp}(h_i), \\ 0, & \text{gdy } y \notin \mathrm{supp}(h_i). \end{cases}$$

Dla podzbioru Y zbioru B, przez h_Y oznaczać będziemy element $\sum_{y \in Y} h_y$.

Dla $f \in A[x]$ (również dla $f \in A[[x]]$), przez C_f oznaczać będziemy zbiór niezerowych współczynników f. Tak jak w poprzednim podrozdziale, przez R będziemy oznaczać $A[x]$. Ponieważ rozważamy dzielniki zera w R, to korzystając z Lematu 5.1.1 możemy zakładać że wielomian $h \in R$ rozważany w poniższych lematach spełnia $C_h \subseteq span(B)$. Wtedy zgodnie z powyższymi oznaczeniami możemy zapisać

$$h = h_T + h_W.$$

Z relacji definiujących A mamy

$$\mathrm{ann}_r^R(h) = \mathrm{ann}_r^R(hR). \tag{5.7}$$

Dodatkowo dla $g \in R$

$$hg = 0 \iff h_T \cdot g = 0 \text{ i } h_W \cdot g = 0, \tag{5.8}$$

oraz jeśli

$$h_T \neq 0, \text{ to } \operatorname{ann}_r^R(h_T) = span(B)[x]. \tag{5.9}$$

Co więcej z równości 5.7 oraz z relacji (R2), jeśli $h_W \neq 0$ i $C_h \subseteq span(B)$, to

$$\operatorname{ann}_r^R(hR) = \operatorname{ann}_r^R(h) = \operatorname{ann}_r^R(h_W). \tag{5.10}$$

Lemat 5.3.2. *Niech $g \in R$ będzie niezerowym elementem, takim że $C_g = \{d\}$. Niezerowy element $h \in R$, taki że $C_h \subseteq span(W)$ jest lewostronnym anihilatorem g wtedy i tylko wtedy, gdy $C_h \subseteq \{e_1, e_2, e_3\}$.*

Dowód. Jeśli $C_h \subseteq \{e_1, e_2, e_3\}$, to $hg = 0$, więc wystarczy pokazać przeciwną implikację. Załóżmy, że $hg = 0$ i dla pewnej nieujemnej liczby n mamy $h_n \in \{a, b, c, a+b+c\} = span(W) \setminus \{e_1, e_2, e_3, 0\}$. Niech n będzie możliwie najmniejszą liczbę o wspomnianej własności. Rozważmy najmniejszą liczbę m, dla której $g_m \neq 0$. Zatem $g_m = d$. Ponieważ $h_{n-1}, \ldots, h_0 \in \{e_1, e_2, e_3, 0\}$ i $g_{m+1}, \ldots, g_{n+m} \in \{0, d\}$, to dostajemy

$$\begin{aligned}(hg)_{n+m} &= h_n g_m + h_{n-1} g_{m+1} + \ldots + h_0 g_{n+m} \\ &= h_n d + h_{n-1} g_{m+1} + \ldots + h_0 g_{n+m} \\ &= h_n d \neq 0,\end{aligned}$$

sprzeczność. □

Dowód następnego lematu jest analogiczny do dowodu Lematu 5.3.2 z dokładnością do zmiany zmiennych.

Lemat 5.3.3. *Ustalmy $k \in \{1, 2, 3\}$. Niech $g \in R$ będzie niezerowym elementem, takim że $C_g = \{d_k\}$. Niezerowy element $h \in R$, taki że $C_h \subseteq span(W)$ jest lewostronnym anihilatorem g, wtedy i tylko wtedy, gdy $C_h = \{e_k\}$.*

Lemat 5.3.4. *Jeśli h jest elementem pierścienia R, takim że $C_h \in span(W)$ i dla pewnej nieujemnej liczby n zachodzi $h_n \in \{a, b, c, a+b+c\}$, to $\operatorname{ann}_r^R(h) = \operatorname{ann}_r^R(hR) = span(P)[x]$.*

Dowód. Zauważmy, że dzięki (R2) zachodzi $span(P)[x] \subseteq \operatorname{ann}_r^R(h)$. Pozostaje pokazać przeciwną inkluzję. Załóżmy nie wprost, że istnieje element g pierścienia R, dla którego $hg = 0$ i $(g_y)_m \neq 0$ dla pewnego $m \geqslant 0$ i $y \in \{d, d_1, d_2, d_3\}$. Wtedy $g_y \neq 0$ i z relacji (R3) łatwo zauważyć, że $hg_y = 0$. Zatem korzystając z Lematu 5.3.2 i Lematu 5.3.3 dostajemy sprzeczność. □

Lemat 5.3.5. *Jeśli h jest niezerowym elementem pierścienia R, takim że $C_h \subseteq \{e_1, e_2, e_3\}$ i dla pewnych nieujemnych liczb n_1, n_2 zachodzi $h_{n_1} = e_i$, $h_{n_2} = e_j$, dla $i \neq j$, to $\mathrm{ann}_r^R(h) = span(P \cup \{d\})[x]$.*

Dowód. Załóżmy, że element h spełnia warunki Lematu. Ponieważ dla dowolnego i mamy $h_i \in \{e_1, e_2, e_3\}$, to jest jasne, że $span(P \cup \{d\})[x] \subseteq \mathrm{ann}_r^R(h)$.

Niech teraz $g \in R$ będzie, takie że $hg = 0$. Wtedy dla dowolnego $k \in \{1, 2, 3\}$,

$$hg_{d_k} = 0.$$

Ponieważ dla pewnych n_1, n_2 mamy $h_{n_1} = e_i$ i $h_{n_2} = e_j$, dla dwóch różnych i, j, to z Lematu 5.3.3 dostajemy, że $g_{d_k} = 0$. Zatem $\mathrm{ann}_r^R(h) = span(P \cup \{d\})[x]$. □

Dowód następnego lematu jest analogiczny do przedstawionego dowodu Lematu 5.3.5.

Lemat 5.3.6. *Jeśli h jest elementem pierścienia R, takim że $C_h = \{e_k\}$ dla pewnego $k \in \{1, 2, 3\}$, to $\mathrm{ann}_r^R(h) = span(P \cup \{d, d_k\})[x]$.*

Stwierdzenie 5.3.7. *Pierścień $R = A[x]$ spełnia (prawostronny) warunek (a.c.).*

Dowód. Rozważmy niezerowy element $h \in R$, dla którego

$$\mathrm{ann}_r^R(hR) \neq \{0\}.$$

Opiszemy możliwe postacie tego anihilatora.

Z Lematu 5.1.1 możemy założyć, że $C_h \subseteq span(B)$ oraz z równości (5.7) dostajemy

$$\mathrm{ann}_r^R(hR) = \mathrm{ann}_r^R(h).$$

Wtedy $h = h_T + h_W$ i spełniony jest jeden z następujących przypadków:

Przypadek 1. $h_W = 0$. Wtedy $\mathrm{ann}_r^R(h) = span(B)[x]$ z równości (5.9).

Przypadek 2. $h_W \neq 0$. Wtedy z równości (5.10) i Lematów 5.3.4, 5.3.5 i 5.3.6 zachodzi

$\mathrm{ann}_r^R(hR) = \mathrm{ann}_r^R(h) = \mathrm{ann}_r^R(h_W) = span(P)[x]$ lub

$\mathrm{ann}_r^R(hR) = \mathrm{ann}_r^R(h) = \mathrm{ann}_r^R(h_W) = span(P \cup \{d\})[x]$ lub

$\mathrm{ann}_r^R(hR) = \mathrm{ann}_r^R(h) = \mathrm{ann}_r^R(h_W) = span(P \cup \{d, d_k\})[x]$ dla pewnego $k \in \{1, 2, 3\}$.

Zauważmy teraz, że dla dowolnego $k \in \{1, 2, 3\}$ mamy

$$span(P) \subseteq span(P \cup \{d\}) \subseteq span(P \cup \{d, d_k\}) \subseteq span(B).$$

Rozważmy dowolne dwa elementy $h, \overline{h} \in R$ i załóżmy, że prawostronne ideały główne pierścienia R generowane przez te elementy mają niezerowe anihilatory. Z powyższych rozważań mamy

$$\mathrm{ann}_r^R(h) \subseteq \mathrm{ann}_r^R(\overline{h}), \text{ co daje } \mathrm{ann}_r^R(hR + \overline{h}R) = \mathrm{ann}_r^R(hR) \text{ lub}$$

$$\mathrm{ann}_r^R(\overline{h}) \subseteq \mathrm{ann}_r^R(h), \text{ co daje } \mathrm{ann}_r^R(hR + \overline{h}R) = \mathrm{ann}_r^R(\overline{h}R) \text{ lub}$$

$$\mathrm{ann}_r^R(h) = span(P \cup \{d, d_k\})[x] \text{ i } \mathrm{ann}_r^R(\overline{h}) = span(P \cup \{d, d_\ell\})[x]$$

dla pewnych $k \neq \ell$, $k, \ell \in \{1, 2, 3\}$. Aby zakończyć dowód wystarczy rozpatrzyć ostatni przypadek. Wtedy

$$\mathrm{ann}_r^R(hR + \overline{h}R) = span(P \cup \{d\})[x],$$

ale również

$$\mathrm{ann}_r^R((e_1 + e_2x)R) = span(P \cup \{d\})[x],$$

więc

$$\mathrm{ann}_r^R(hR + \overline{h}R) = \mathrm{ann}_r^R((e_1 + e_2x)R).$$

Zatem w dowolnym przypadku prawostronny anihilator ideału $hR + \overline{h}R$ jest równy prawostronnemu anihilatorowi pewnego ideału głównego. □

Uwaga 5.3.1. Powyższe argumenty nie jest trudno powtórzyć dla szeregów potęgowych, więc również $A[[x]]$ spełnia warunek (a.c.). Podsumowując, istnieje skończenie wymiarowa algebra A, która nie spełnia warunku (a.c.), ale $A[x]$ i $A[[x]]$ spełniają ten warunek.

Bibliografia

[1] G. Abrams. “Leavitt path algebras: the first decade”. W: *Bull. Math. Sci.* 5 (2015), s. 59–120.

[2] G. Abrams, P. Ara i M. S. Molina. *Leavitt path algebras.* Lecture Notes in Mathematics (2191), Springer- Verlag, London, 2017.

[3] G. Abrams, J. P. Bell i K. M. Rangaswamy. “On prime nonprimitive von Neumann regular algebras”. W: *Trans. Amer. Math. Soc.* 366(5) (2014), s. 2375–2392.

[4] G. Abrams, F. Mantese i A. Tonolo. “Leavitt path algebras are Bézout”. W: *Israel J. Math.* 228(1) (2018), s. 53–78.

[5] G. Abrams, G. A. Pino i M. S. Molina. “Locally finite Leavitt path algebras”. W: *Israel J. Math.* 165 (2008), s. 329–348.

[6] G. Abrams i G. A. Pino. “The Leavitt path algebra of a graph”. W: *J. Algebra* 293 (2005), s. 319–334.

[7] A. L. Agore. “The maximal dimension of unital subalgebras of the matrix algebra”. W: *Forum Math.* 29(1) (2017), s. 1–5.

[8] S. A. Amitsur i J. Levitzki. “Minimal identities for algebras”. W: *Trans. Amer. Math. Soc.* 1 (1950), s. 449–463.

[9] D. D. Anderson i S. Chun. “Annihilator conditions on modules over commutative rings”. W: *J. Algebra Appl.* 16 (2017). 19 pp.

[10] P. Ara, M. Gonzalez-Barroso, K. Goodearl i E. Pardo. “Fractional skew monoid rings”. W: *J. Algebra* 278 (2004), s. 104–126.

[11] P. Ara, M. A. Moreno i E. Pardo. “Nonstable K-theory for graph algebras”. W: *Algebr. Represent. Theory* 10(2) (2007), s. 157–178.

[12] F. Azarpanah, O. A. S. Karamzadeh i A. R. Aliabad. "On ideals consisting entirely of zero divisors". W: *Comm. Algebra* 28 (2000), s. 1061–1073.

[13] G. Bajor, L. van Wyk i M. Ziembowski. "Construction of a class of maximal commutative subalgebras of prime Leavitt path algebras". W: *Forum Math.* 33(6) (2021), s. 1573–1590.

[14] G. Bajor i M. Ziembowski. "An annihilator condition on Leavitt path algebras". W: *Publ. Math. Debrecen* 95 (2019), s. 169–185.

[15] G. Bajor i M. Ziembowski. "Annihilator condition does not pass to polynomials and power series". W: *J. Pure Appl. Algebra* 223(9) (2019), s. 3869–3878.

[16] G. M. Bergman. "The diamond lemma for ring theoryal linear Lie". W: *Adv. Math* 29 (1978), s. 178–218.

[17] M. Brešar. *Introduction to Noncommutative Algebra*. Springer-Verlag, Switzerland, 2014. ISBN: 978-3-319-08692-7.

[18] C. G. Canto i A. Nasr-Isfahani. "The commutative core of a Leavitt path algebra". W: *J. Algebra* 511 (2018), s. 227–248.

[19] L. O. Clark, D. M. Barquero, C. M. Gonzalez i M. S. Molina. "Using the Steinberg algebra model to determine the center of any Leavitt path algebra". W: *Israel J. Math.* 230(1) (2019), s. 23–44.

[20] L. O. Clark, C. G. Canto i A. Nasr-Isfahani. "The cycline subalgebra of a Kumjian-Pask algebra". W: *Proc. Amer. Math. Soc.* 145(5) (2017), s. 1969–1980.

[21] P. Colak. "Two-sided ideals in Leavitt path algebras". W: *J. Algebra Appl* 10(5) (2011). 9 pp.

[22] J. Cuntz. "Simple C^*-algebras generated by isometries". W: *Comm. Math. Phys* 57(2) (1977), s. 173–185.

[23] M. Domokos i M. Zubor. "Commutative subalgebras of the Grassmann algebra". W: *J. Algebra Appl.* 14(8) (2015). 1550125, 13 pp.

[24] A. Elduque. "On maximal subalgebras of central simple Malcev algebras". W: *J. Algebra* 103(1) (1986), s. 216–227.

[25] A. Elduque, S. Laliena i S. Sacristán. "Maximal subalgebras of associative superalgebras". W: *J. Algebra* 275(1) (2004), s. 40–58.

[26] W. H. Gustafson. "On maximal commutative algebras of linear transformations". W: *J. Algebra* 42(2) (1976), s. 557–563.

[27] M. Henriksen i M. Jerison. "The space of minimal prime ideals of a commutative ring". W: *Trans. Amer. Math. Soc.* 115 (1965), s. 110–130.

[28] C. Y. Hong, N. K. Kim, Y. Lee i P. P. Nielsen. "Minimal prime spectrum of rings with annihilator conditions". W: *J. Pure Appl. Algebra* 213(7) (2009), s. 1478–1488.

[29] C. Y. Hong, N. K. Kim, Y. Lee i S. J. Ryu. "Rings with Property (A) and their extensions". W: *J. Algebra* 315 (2007), s. 612–628.

[30] J. A. Huckaba. *Commutative rings with zero divisors.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1988. ISBN: 0-8247-7844-8.

[31] J. A. Huckaba i J. M. Keller. "Annihilation of ideals in commutative rings". W: *Pacific J. Math* 83 (1979), s. 375–379.

[32] N. Jacobson. "Schur's theorems on commutative matrices". W: *Bull. Amer. Math. Soc.* 50 (1944), s. 431–436.

[33] T. Kajiwara i Y. Watatari. "Maximal abelian subalgebras of C^*-algebras associated with complex dynamical systems and self-similar maps". W: *J. Math. Anal. Appl.* 455(5) (2010), s. 1383–1400.

[34] I. Kaplansky. *Commutative rings rev. ed. Chicago.* Univ. of Chicago Press, 1974.

[35] W. G. Leavitt. "The module type of a ring". W: *Trans. Amer. Math. Soc.* 103 (1962), s. 113–130.

[36] T. G. Lucas. "Two annihilator conditions: Property (A) and (a.c.)" W: *Comm. Algebra* 14 (1986), s. 557–580.

[37] M. Mirzakhani. "A simple proof of a theorem of Schur." W: *Amer. Math. Monthly* 105(3) (1998), s. 260–262.

[38] G. Nagy i S. Reznikoff. "Abelian core of graph algebras". W: *J. London Math. Soc.* 85(3) (2012), s. 889–908.

[39] C. Nastaescu i F. van Oystaeyen. *Graded Ring Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1982. ISBN: 0-444-86489-X.

[40] G. A. Pino, D. M. Barquero, C. M. Gonzalez i M. S. Molina. "The socle of a Leavitt path algebra". W: *J. Pure Appl. Algebra* 212(3) (2008), s. 500–509.

[41] G. A. Pino, D. M. Barquero, C. M. Gonzalez i M. S. Molina. “Socle theory for Leavitt path algebras of arbitrary graphs”. W: *Rev. Mat. Iberoamericana* 26 (2010), s. 611–638.

[42] G. A. Pino, J. Brox i M. S. Molina. “Cycles in Leavitt path algebras by means of idempotents”. W: *Forum Math.* 27(1) (2015), s. 601–633.

[43] G. A. Pino i K. Crow. “The center of a Leavitt path algebra”. W: *Rev. Mat. Iberoamericana* 27 (2011), s. 621–644.

[44] G. A. Pino, E. Pardo i M. S. Molina. “Exchange Leavitt path algebras and stable rank”. W: *J. Algebra* 305(2) (2006), s. 912–936.

[45] Y. Quentel. “Sur la compacité du spectre minimal d’un anneau”. W: *Bull. Soc. Math. France* 99 (1971), s. 265–272.

[46] M. L. Racine. “On maximal subalgebras”. W: *J. Algebra* 30 (1974), s. 155–180.

[47] M. L. Racine. “Maximal subalgebras of central separable algebras”. W: *Proc. Amer. Math. Soc.* 68(1) (1978), s. 11–15.

[48] J. Schur. “Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen. (German)”. W: *J. Reine Angew. Math.* 130 (1905), s. 66–76.

[49] J. Szigeti, J. van den Berg, L. van Wyk i M. Ziembowski. “The maximum dimension of a Lie nilpotent subalgebra of $\mathbb{M}_n(F)$ of index m.” W: *Trans. Amer. Math. Soc.* 372(7) (2019), s. 4553–4583.

[50] M. Tomforde. “Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring”. W: *J. Pure Appl. Algebra* 215(4) (2011), s. 471–484.

[51] L. van Wyk i M. Ziembowski. “Lie solvability and the identity $[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_q, y_q] = 0$ in certain matrix algebras”. W: *Linear Algebra Appl.* 533 (2017), s. 235–257.

[52] M. Zahiri, A. Moussavi i R. Mohammadi. “On rings with annihilator condition”. W: *Studia Sci. Math Hungar.* 54 (2017), s. 82–96.